

Gewöhnliche Differentialgleichungen

12. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Freitag, 16. Juli 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Zeigen Sie die Instabilität der Ruhelage $(0, 0)$ des autonomen Systems

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y^2 \\y' &= -xy - y^3\end{aligned}$$

mittels einer Ljapunov-Funktion der Form $V(x, y) = -x^2 + ay^2$, $a > 0$ geeignet.

Aufgabe 2

Gegeben seien folgende (aus Aufgabe 1 von Übungsblatt 8 bekannte) autonome Systeme:

$$\begin{array}{ll}1) \quad \begin{cases} x' = (1-x)(y^2 - 4) \\ y' = xy \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \\3) \quad \begin{cases} x' = -y + x^2 \\ y' = x - y^2 \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} x' = -y(4 - x^2) \\ y' = x - y^3 \end{cases}\end{array}$$

- Bestimmen Sie, sofern möglich, die Typen der Ruhelagen durch Linearisierung.
- Skizzieren Sie anhand dieser Ergebnisse das Phasenportrait.

Aufgabe 3

Gegeben seien folgende autonome Systeme:

$$\begin{array}{ll}1) \quad \begin{cases} x' = -x - y + y^2 \\ y' = x - y \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} x' = -x + y - x(y - x) \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \\3) \quad \begin{cases} x' = -2x + 2y^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases}\end{array}$$

- Skizzieren Sie jeweils das Richtungsfeld mit Nullklinen und Ruhelagen.
- Bestimmen Sie, sofern möglich, die Typen der Ruhelagen durch Linearisierung.
- Skizzieren Sie anhand dieser Ergebnisse das Phasenportrait.