UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 15. Juli 2004

Gewöhnliche Differentialgleichungen

13. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Freitag, 23. Juli 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende autonome Systeme:

1) $$\begin{aligned} x' &= y - yx^2 \\ y' &= 2x + xy \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x' &= x + 3y + y^2 + 3 \\ y' &= -x + y \end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie jeweils das Richtungsfeld mit Nullklinen und Ruhelagen.

b) Klassifizieren Sie die Ruhelagen.

c) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass jedes der Systeme geschlossene Orbits um den Nullpunkt besitzt.

a) $$\begin{aligned} x' &= -y(1-x^2) \\ y' &= x(1-y^2) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x' &= -y + x^4 \\ y' &= x + y^4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie zu folgendem System explizit die Poincare-Abbildung:

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - x^3 - xy^2 \\ y' &= 2x + y - y^3 - yx^2 \end{aligned}$$

Hinweis: Transformieren Sie das System mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie das Richtungsfeld des Systems $x' = -y + 2xy,\ y' = x + y^2 + x^2$, klassifizieren Sie, sofern möglich, alle Ruhelagen und zeigen Sie:

a) Das System besitzt geschlossene Orbits.

b) Es existiert eine homokline Sattelverbindung, d.h. eine Trajektorie, die einen Sattelpunkt sowohl „verläßt“ als auch „erreicht“.

Aufgabe 5 *keine Abgabe*

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $u'' - 2tu' - 4u = 0$ ein Fundamentalsystem mittels eines Potenzreihenansatzes.

Aufgabe 6 *keine Abgabe*

a) Stellen Sie für $yu_x - yu_y = xu$ das System der charakteristischen Gleichungen auf.

b) Bestimmen Sie die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung mit $u(x,x) = x^2$, soweit sie in der Halbebene $\{(x,y) : y > 0\}$ existiert. Wo existiert sie?

Aufgabe 7 *keine Abgabe*

Zeigen Sie, dass die Lösungen der Differentialgleichung $x' = x^2 - e^{t^3} + 1$ mit $x(0) < 0$ nach rechts in $[0,\infty)$, nach links aber nur in $(-t_0, 0]$ existieren (dabei ist $t_0 > 0$ abhängig von $x(0)$). Skizzieren Sie das Richtungsfeld und einige typische Lösungen.

Aufgabe 8 *keine Abgabe*

Es sei $u(t,\varepsilon)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''' - u' + \varepsilon u + 1 = 0,\ u(0) = u'(0) = 1,\ u''(0) = 0.$$

Leiten Sie für $y(t) = \dfrac{\partial u(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ die Variationsgleichung her und berechnen Sie $y(t)$.