Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 19. April 2004

Funktionentheorie I

Vertiefende Wiederholung, SS 2004

Keine Abgabe, Besprechung in der ersten Übungsstunde

Aufgabe 1 *Konforme Abbildung auf Ringgebiete*

Konstruieren Sie eine Möbius-Transformation, die $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 1\}$ auf einen Kreisring $\{w \in \mathbb{C} : r < |w| < 1\}$ mit geeignetem $r > 0$ abbildet. *Hinweis:* Wie lautet das Bild von $\partial D \cap \mathbb{R}$ unter einer solchen Abbildung?

Aufgabe 2 *Wiederholte Spiegelung an Kreisen*

Gegeben seien Spiegelungen S_1 und S_2 an $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ bzw. $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| = 1\}$. Ferner seien $T_1 = S_1 \circ S_2$, $T_2 = S_2 \circ S_1$ und $\mathcal{T}$ die Menge aller Möbius-Transformationen, die als Hintereinanderausführung von endlich vielen Elementen der Menge $\{T_1, T_2\}$ dargestellt werden können.

a) Berechnen Sie T_1 und T_2.

b) Zeigen Sie: $|T_k(z_1) - T_k(z_2)| < \eta |z_1 - z_2|$ mit $0 < \eta < 1$ für z_1, z_2 im Innengebiet von C_k, $k \in \{1, 2\}$.

c) Es sei (F_n) eine Folge paarweise verschiedener Transformationen aus $\mathcal{T}$ und $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(F_n(z))$.

Aufgabe 3 *Konforme Abbildung der Fläche unter einer Hyperbel*

Gegeben Sei $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 1\}$. Bilden Sie D konform auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$ ab. *Hinweis:* Betrachten Sie $\varphi(D)$ mit $\varphi(z) = z^2$.

Aufgabe 4 *Rekursionsgleichungen und Potenzreihen*

Es sei (a_n) die Folge der Fibonacci-Zahlen, d.h., es gilt $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

a) Stellen Sie f möglichst einfach dar. *Hinweis:* $a_{n+2} z^{n+2} = z \cdot a_{n+1} z^{n+1} + z^2 \cdot a_n z^n$.

b) Bestimmen Sie a_n, $n \in \mathbb{N}_0$. *Hinweis:* Partialbruchzerlegung von f.

c) Welchen Konvergenzradius besitzt die Potenzreihe von f?