Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 19. April 2004

Funktionentheorie I

2. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 4. Mai, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Subordination I*

a) Zeigen Sie, daß

$$\Phi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

eine konforme Abbildung des Einheitskreises ist, und bestimmen Sie $f(\mathbb{D})$.

b) Es sei f holomorph in $\mathbb{D}$ mit $f(0) = 1$ und $f(\mathbb{D}) \cap \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = \emptyset$. Beweisen Sie

$$|f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad |f'(0)| \leq 4\,.$$

Aufgabe 2 *Eigentliche Abbildungen*

Beweisen oder widerlegen Sie, daß f eigentlich ist:

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f Polynom vom Grad $d > 0$.

b) $f : \mathbb{C} \setminus [0, \infty] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = z^2$.

c) $f : \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \to \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$, $f(z) = z^2 - 2$.

d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$.

Folgern Sie aus a) den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 3 *Eigentliche Abbildungen der oberen Halbebene*

Beweisen Sie, daß

$$f(z) = \sum_{j=1}^{h} \frac{c_j}{z - \xi_j}\,, \qquad c_j, \xi_j \in \mathbb{R}\,, \quad c_j < 0 \quad (1 \leq j \leq h)$$

eine eigentliche Selbstabbildung der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ ist.

Aufgabe 4 *Subordination II*

Gegeben sei eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Abbildung f mir $f(0) = 0$ und $|\operatorname{Im} f(z)| < \pi/2$. Zeigen Sie

$$|f(z)| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}\,, \quad z \in \mathbb{D} \qquad \text{und} \qquad |f'(0)| \leq 2\,.$$

Wann gilt Gleichheit in der ersten (für $z \neq 0$) bzw. in der zweiten Ungleichung?
Hinweis: Konstruieren Sie eine konforme Abbildung $\Phi : \mathbb{D} \to \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} w| < \pi/2\}$ mit $\Phi(0) = 0$.