Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 3. Mai 2004

Funktionentheorie I

3. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 11. Mai, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Harmonische und konforme Abbildungen*

Es sei u das Argument in $Q = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ mit $u(i-1) = 3/4\,\pi$.

a) Skizzieren Sie die *Niveaumengen* $\Gamma_c = \{z \in Q : u(z) = c\}$, $c \in (\pi/2, \pi)$ sowie die Mengen $V = T(Q)$ und $T(\Gamma_c)$ mit $T(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

b) Begründen Sie, daß $u \circ T^{-1}$ in V harmonisch ist, und berechnen Sie $\lim\limits_{z \to \zeta} u \circ T^{-1}(z)$ für $\zeta \in \partial V$, sofern dieser Grenzwert existiert.

c) Für $z \in V$ sei $\alpha(z)$ der Winkel zwischen den Strecken $[z, -1]$ und $[z, 1]$. Zeigen Sie $\alpha(z) = u \circ T^{-1}(z)$ und folgern Sie einen bekannten Satz der Geometrie.

Aufgabe 2 *Harmonisches Maß in Ringgebieten*

Es sei $r > 1$ und u die Lösung des Dirichlet-Problems $\Delta u = 0$ in $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$, $u(z) = 0$ für $|z| = 1$ und $u(z) = 1$ für $|z| = r$.

a) Beweisen Sie, daß u rotationssymmetrisch ist.

b) Zeigen Sie, daß rotationssymmetrische, harmonische Funktionen f die Form $f(z) = \Phi(|z|)$ besitzen mit $\Phi''(r) + \Phi'(r)/r = 0$.

c) Bestimmen Sie u.

d) Es sei $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : 144x^2 + 225y^2 < 400\}$. Lösen Sie das Dirichlet-Problem $\Delta v = 0$ in $\Omega = D \setminus [-1, 1]$, $u(z) = 0$ für $z \in [-1, 1]$, $u(z) = 1$ für $z \in \partial D$. *Hinweis:* Verwenden Sie die Joukowski-Funktion.

Aufgabe 3 *Harmonische Funktionen und Fourier-Reihen*

Lösen Sie das Dirichlet-Problem $\Delta u = 0$ in $\mathbb{D}$, $u\left(e^{it}\right) = t(2\pi - t)$, $t \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 4 *Harmonische Funktionen in der oberen Halbebene*

Gegeben sei eine stetige und beschränkte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und es sei

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}\, h(\xi)\, d\xi\,, \qquad z = x + iy \in \mathbb{H}$$

mit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

a) Beweisen Sie i) $u \in C^\infty(\mathbb{H})$, ii) u ist harmonisch in $\mathbb{H}$ und iii) $\lim\limits_{z \to x} u(z) = h(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie $u(i)$ für eine in $\mathbb{H}$ harmonische und in $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stetige Funktion u mit $u(x) = |\arctan x|$, $x \in \mathbb{R}$.