Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 10. Mai 2004

Funktionentheorie I

4. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 18. Mai, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Laurent-Reihen*

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von

$$f(z) = \frac{z^2 - (1+2i)z + 2(1+3i)}{(z+2i)(z-1)^2}$$

in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 2\}$.

Aufgabe 2 *Residuen*

Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in $z_0 \in \mathbb{C}$:

a) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$ b) $\dfrac{1}{\sin z}$

c) $\dfrac{z^5+2}{z^2}\, e^{-1/z^2}$ d) $\dfrac{1}{z^n - 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3 *Abbildungsverhalten bei isolierten Singularitäten*

Die Funktion $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und injektiv.

a) Zeigen Sie, daß f in 0 keine wesentliche Singularität besitzt.
Hinweis: Beachten Sie $f(\{0 < |z| < 1/2\}) \cap f(\{1/2 < |z| < 1\}) = \emptyset$.

b) Beweisen Sie, daß f in 0 eine hebbare Singularität oder einen Pol erster Ordnung besitzt.

c) Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $g : G \setminus \{z_0\} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ mit $\lim\limits_{z \to \zeta} |g(z)| = 1$ für $\zeta \in \partial G$. Weiter besitze g in z_0 einen Pol erster Ordnung. Folgern Sie, daß g konform ist.

Aufgabe 4 *Integralberechnung mit Cauchyschem Integralsatz*

Berechnen Sie die Fresnelschen Integrale

$$\int_0^\infty \cos x^2 \, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \sin x^2 \, dx$$

mittels Integration von e^{iz^2} über den Rand des Sektors
$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\, 0 < \arg z < \pi/4\}$, $R > 0$. *Hinweis:* Es gilt $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$.