Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 17. Mai 2004

# Funktionentheorie I

5. Übungsangebot, SS 2004

**Abgabe: Dienstag, 25. Mai, 12.00 Uhr in den Kasten**

**Aufgabe 1** *Satz von Rouché*

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von

a) $e^z \sin z + 9z^n$ in $\mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}_0$

b) $z^4 + 12z^2 + 15z + 1$ in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

**Aufgabe 2** *Asymptotische Verteilung der Nullstellen einer gestörten Funktion*

Es sei $f(z) = \sin z + e^{-z}$. Beweisen Sie:

a) Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Nullstellen $z_n$ von $f$ mit $|z_n - n\pi| \leq \dfrac{1}{2}$.

*Hinweis:* Verwenden Sie $|\sin z| \geq |z| - \dfrac{|z|^3}{3}$ für $|z| \leq \frac{1}{2}$ und $|e^{-z}| \leq e^{-n\pi+1/2}$ für $|z - n\pi| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - n\pi| = 0\,.$

**Aufgabe 3** *Argumentprinzip*

a) Es sei $D = \{re^{it} \in \mathbb{D} : r < 1, -\dfrac{3}{4}\pi < t < \dfrac{3}{4}\pi\}$, $\gamma = \partial D$ und $f(z) = z^2$. Bestimmen Sie für jeden Punkt $w \in f(D)$ die Windungszahl $n(f \circ \gamma, w)$, sofern sie definiert ist.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ für

i) $f(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$, $\gamma : z(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$

ii) $f(z) = \tan \pi z$, $\gamma : z(t) = \pi e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$

**Aufgabe 4** *Anwendung des Residuensatzes*

Berechnen Sie

$$a) \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx \qquad b) \int_0^\infty \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\,dx \quad (0<\lambda<1) \qquad c) \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$d) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \qquad e) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^4}$$

**Aufgabe 5** *Holomorphe Fixpunktformel*

Gegeben sei eine rationale Abbildung $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie

$$\lim_{r\to\infty} \int_{|z|=r} \left( \frac{1}{z-f(z)} - \frac{1}{z} \right) dz = 0\,.$$

b) Folgern Sie die holomorphe Fixpunktformel

$$\sum_{f(z)=z} \operatorname{Res}_z \left( \frac{1}{z-f(z)} \right) = 1\,.$$

c) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Fixpunkt von $f$ mit $f'(z_0) = \lambda \neq 1$. Beweisen Sie:

i) $\operatorname{Res}_{z_0} \dfrac{1}{z-f(z)} = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

*Hinweis:* Nehmen Sie o.B.d.A. $z_0 = 0$ an, und entwickeln Sie $f$ um $z_0$.

ii) Es gilt $|\lambda| < 1$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} \dfrac{1}{1-\lambda} > 1/2$.

iii) Für $\deg f \geq 1$ besitzt $f$ einen Fixpunkt $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|f'(z_1)| \geq 1$.