Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 01. Juni 2004

Funktionentheorie I

6. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 08. Juni, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Normalität*

Begründen oder Widerlegen Sie die Normalität der Familie $\mathcal{F}$ für

a) $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) = z^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\}$

b) $\mathcal{F} = \{f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) = z^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\}$

c) $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\,, \quad f$ Polynom vom Höchstgrad $3\}$

d) $\mathcal{F} = \left\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\,, \quad f(0) = 0\,, \quad |f'(z)| \le \dfrac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\right\}$

e) $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) = \sin az\,, \quad |a| < 1\}$

f) $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) = \sin az\,, \quad |\operatorname{Im} a| < 1\}$

Aufgabe 2 *Normalität und gleichmäßige Konvergenz*

Es sei $f_n(z) = (1 + z/n)^n$. Beweisen Sie:

a) (f_n) ist normal in $\mathbb{C}$

b) (f_n) konvergiert in $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen $f(z) = e^z$.
Hinweis: Dies ist auf $\mathbb{R}$ bekannt.

Aufgabe 3 *Iteration der Koebe-Funktion*

Beweisen Sie für die Folge $f^n = f \circ \ldots \circ f$ der Iterierten von $f(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$

a) (f^n) ist in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ normal.

b) Es gilt $\lim f^n(z) = 0$ gleichmäßig in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.
Hinweis: Betrachten Sie (f^n) für $x > 0$.

Aufgabe 4 *Partialbruchzerlegung meromorpher Funktionen*

Zeigen Sie Sie

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}\,, \qquad z \ne 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$