Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 08. Juni 2004

Funktionentheorie I

7. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 15. Juni, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Partialbruchzerlegung meromorpher Funktionen*

Es sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Polstellen von $f(z) = \dfrac{1}{\sin \pi z \ \sinh \pi z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie $c_k = \operatorname{Res}_{z_k} f$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie

$$f(z) = \frac{1}{(\pi z)^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_k}{z - z_k} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{C}\,.$$

c) Betrachten Sie f auf $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z > 0\}$, und folgern Sie $C = 0$.

Aufgabe 2 *Unendliche Produkte*

Untersuchen Sie folgende Produkte auf Konvergenz. Berechnen Sie im Falle von *a*) und *b*) gegebenenfalls auch den Wert des Produktes.

a) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ b) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ c) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

d) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ e) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ f) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$

g) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Aufgabe 3 *Darstellung eines unendlichen Produktes*

Gegeben sei eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_1 > 1$ sowie

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - n_k^{-z}\right)\,, \qquad \operatorname{Re} z > 1\,.$$

a) Zeigen Sie die lokal gleichmässige Konvergenz des Produktes sowie, daß f nullstellenfrei ist.

b) Beweisen Sie die Existenz einer für $\operatorname{Re} z > 1/2$ holomorphen Abbildung g mit

$$\log f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-z} + g(z)\,.$$

Aufgabe 4 *Unendliche Blaschkeprodukte*

Konstruieren Sie mit Hilfe eines Blaschkeproduktes eine Funktion $f \ : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $z \in \partial\mathbb{D}$ Häufungspunkt von Nullstellen ist.
Hinweis: Verwenden Sie, daß $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ dicht liegt in $\partial\mathbb{D}$.