Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 14. Juni 2004

Funktionentheorie I

8. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 22. Juni, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Nullstellen eines unendlichen Produktes*

Zeigen Sie, daß $f(z) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n - n^z}\right)$ in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ holomorph ist, und daß jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z = 1$ Häufungspunkt von Nullstellen ist.

Aufgabe 2 *Darstellung einer ganzen Funktion als Produkt*

Zeigen Sie

$$e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right) .$$

Aufgabe 3 *Weierstraß'sche σ-Funktion*

Es sei $M = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Konstruieren Sie eine ganze Funktion, deren Nullstellen genau die Punkte von M mit Vielfachheit 1 sind.
Hinweis: Verwenden Sie $\sum_{\omega \in M \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty$.

Aufgabe 4 *Verdoppelungsformel der Gammafunktion*

Zeigen Sie

a) $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$

b) $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}\right) = 2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$

c) $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$

Hinweis: Folgern Sie b) aus a) und c) aus b)!