UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 21. Juni 2004

Funktionentheorie I

9. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 29. Juni, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Riemann-Abbildungen*

Bestimmen Sie die konforme Abbildung $f : D \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ für

a) $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\quad z_0 = 1$,

b) $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \dfrac{\pi}{4} \right\}$, $\quad z_0 = 0$.

Aufgabe 2 *Konformer Radius*

Bestimmen Sie für

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{3}| < 2 \right\} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + \sqrt{3}| < 2 \right\}$$

ein $r > 0$ so, daß eine konforme Abbildung $f : D \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ existiert.

Aufgabe 3 *Riemann-Abbildung und Symmetrie*

Das Gebiet $D \neq \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend mit $z \in D \iff \bar{z} \in D$, und $f : D \to \mathbb{D}$ sei konform mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$. Beweisen Sie

a) Für $x \in D \cap \mathbb{R}$ gilt $f(x) \in \mathbb{R}$ und $f'(x) > 0$.

b) Ist D zusätzlich zur imaginären Achse symmetrisch, so gilt $f(-z) = -f(z)$ in D.

c) Ist D das Innere des Sechsecks mit Ecken $e^{2\pi i k/6}$ $(k = 0, \ldots, 5)$, so besitzt f die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{6n+1}, \qquad |z| < \rho$$

mit $\rho > 0$ und $a_n \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 *Darstellung der ζ-Funktion durch Dirichlet-Reihen*

Beweisen Sie

a)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

mit $\Lambda(n) = \log p$, falls $n = p^k$ $(k \in \mathbb{N})$ eine Primzahlpotenz ist, und $\Lambda(n) = 0$ andernfalls.

b)

$$\{\zeta(s)\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

wobei $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n angibt, d.h. $d(1) = 1$ und $d(n) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots (m_r + 1)$, falls $n > 1$ die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ $(r \in \mathbb{N})$ besitzt.