Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 28. Juni 2004

Funktionentheorie I

10. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 6. Juli, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Greensche Funktion*

Gegeben sei ein Polynom p vom Grad $n \geq 1$ sowie $D = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \,:\, |p(z)| > 1\}$.

a) Begründen Sie, daß D ein Gebiet ist.

b) Beweisen Sie, daß
$$G(z) = \frac{1}{n} \log |p(z)|$$
die Greensche Funktion in D mit Pol in ∞ ist.

Aufgabe 2 *Spiegelung an Quadriken*

Es sei $D = \{x + iy \in \mathbb{C} \,:\, 144x^2 + 225y^2 < 400\}$. Bestimmen Sie zu $z \in D \setminus [-1, 1]$ den Spiegelpunkt z^* an $E = \partial D$.

Aufgabe 3 *Doppeltperiodische Funktionen*

Es sei $Q = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} < 1\}$ und $f \,:\, Q \to \mathbb{D}$ die Riemann-Abbildung mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$. Beweisen Sie, daß f durch wiederholte Anwendung des Spiegelungsprinzips zu einer meromorphen Funktion von $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Bestimmen Sie ihre Pol- und Nullstellen sowie ihre Perioden.
Hinweis: Beachten Sie, daß für jede Fortsetzung von f durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ existieren, so daß $f(z) = f(z + 2k + 2i\ell)$ für $z \in Q$ gilt.

Aufgabe 4 *Ränderzuordnung bei konformer Abbildung*

Gegeben sei das Gebiet $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Im} z > 0 \text{ und } |z| > 1\}$. Konstruieren Sie eine konforme Abbildung f von D auf $\mathbb{D}$, und bestimmen Sie, welchen Teilbögen von $\partial\mathbb{D}$ die einzelnen Teile von ∂D durch f zugeordnet werden.
Hinweis: Betrachten Sie $g(z) = -\dfrac{1}{z^2}$ in D.