Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 5. Juli 2004

Funktionentheorie I

11. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 13. Juli, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Konforme Abbildung aufs Rechteck*

Es sei $0 < k < 1$,

$$G = \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Im} z \leq 0,\, \operatorname{Re} z \in \left\{ -\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k} \right\} \right\}$$

und

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}$$

für $\zeta \in G$ mit $\varphi(0) = 1$. Beweisen Sie, daß

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}$$

die obere Halbebene $\mathbb{H}$ konform auf ein Rechteck abbildet. Zeigen Sie weiter, daß f auf $\overline{\mathbb{H}}$ stetig ist, und bestimmen Sie die Ränderzuordnung.

Aufgabe 2 *Modul eines Rechtecks*

Gegeben sei eine Jordankurve Γ sowie paarweise verschiedene Punkte $z_k \in |\Gamma|$ ($k = 1, \ldots, 4$). Die Teilbögen von Γ zwischen zwei benachbarten Punkten seien jeweils analytisch. Schließlich bezeichne D das Innengebiet von Γ.

a) Zeigen Sie, daß jede konforme Abbildung von D nach $\mathbb{D}$ eine stetige Fortsetzung nach ∂D besitzt.

b) Es seien $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 2\pi$ und $\zeta_k = e^{i\alpha_k}$ ($k = 1, \ldots, 4$). Begründen Sie die Existenz einer Möbius-Transformation T, die $\mathbb{D}$ auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ abbildet, so daß $T(\zeta_1) = -1/k$, $T(\zeta_2) = -1$, $T(\zeta_3) = 1/k$, $T(\zeta_4) = 1$ mit einem geeigneten $0 < k < 1$ gilt.

c) Folgern Sie mit Aufgabe 1 die Existenz einer konformen Abbildung, die D so auf eine Rechteck abbildet, daß die Punkte z_k ($k = 1, \ldots, 4$) auf dessen Ecken abgebildet werden.

Aufgabe 3 *Punktsymmetrie in $\mathcal{S}$*

Gegeben sei $f \in \mathcal{S}$, $g(z) = z\sqrt{\dfrac{f\left(z^2\right)}{z^2}}$ und $h \in \mathcal{S}$ mit $h(\mathbb{D}) = -h(\mathbb{D})$.

a) Zeigen Sie $g \in \mathcal{S}$, und beweisen Sie

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |g(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}\,, \qquad |z| < 1\,.$$

b) Beweisen Sie die Existenz eines $w \in \mathcal{S}$ mit $h(z) = z\sqrt{\dfrac{w\left(z^2\right)}{z^2}}$.

Aufgabe 4 *Ein weiterer Verzerrungssatz*

a) Folgern Sie für $f \in \mathcal{S}$ aus $|a_2| \leq 2$

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{6}{1-|z|^2}\,, \qquad |z| < 1\,.$$

b) Gegeben sei $f \in \mathcal{S}$ und $c \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, daß aus $f(z) \neq c$ und $f(z) \neq -c$ die Ungleichung $|c| \geq \dfrac{1}{2}$ folgt. Wann gilt $|c| = \dfrac{1}{2}$?

Hinweis: Betrachten Sie $\dfrac{f(z)}{1-f(z)/c}$.