Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 12. Juli 2004

Funktionentheorie I

12. Übungsangebot, SS 2004

Abgabe: Dienstag, 20. Juli, 12.00 Uhr in den Kasten

Aufgabe 1 *Doppelverhältnis und Schwarzsche Ableitung*

Gegeben sei eine in einer Umgebung von 0 holomorphe Funktion $f(z) = z + \eta_2 z^2 + \eta_3 z^3 + \ldots$ sowie paarweise verschiedene komplexe Zahlen a, b, c, d. Beweisen Sie für $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{(f(at), f(bt), f(ct), f(dt))}{(a,b,c,d)} = 1 + \frac{t^2}{6}\,(a-b)(c-d)\ \{f, z\}\big|_{z=0} + O\left(t^3\right), \qquad t \to 0\,.$$

Aufgabe 2 *Sternförmigkeit*

Gegeben sei $f \in \mathcal{S}$ mit sternförmigem Bildgebiet (bzgl. 0). Beweisen Sie, daß $f(K_r(0))$, $0 < r < 1$, ebenfalls sternförmig bzgl. 0 ist.
Hinweis: $f(\mathbb{D})$ sternförmig $\iff$ zu t mit $0 < t < 1$ gibt es holomorphes $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $\omega(0) = 0$ und $tf(z) = f(\omega(z))$.

Aufgabe 3 *Kettenregel für die Schwarzsche Ableitung*

Gegeben seien zwei Gebiete $D, G \subset \mathbb{C}$, sowie holomorphe Abbildungen $f : D \to G$ und $g : G \to \mathbb{C}$ mit $f'(w) \neq 0$ in D und $g'(z) \neq 0$ in G. Zeigen Sie

$$\{f \circ g, z\} = [g'(z)]^2\ \{f, w\}\big|_{w=g(z)} + \{g, z\}\,, \qquad z \in D\,.$$

Aufgabe 4 *Ein notwendiges Kriterium für Schlichtheit*

Es sei $f \in \mathcal{S}$ und $\zeta \in \mathbb{D}$. Berechnen Sie $\{g, z\}\big|_{z=0}$ für die Abbildung

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)\, f'(\zeta)}$$

und folgern Sie

$$|\{f, \zeta\}| \leq \frac{6}{\left(1-|\zeta|^2\right)^2}\,, \qquad |\zeta| < 1\,.$$

Zeigen Sie weiter, daß diese Abschätzung scharf ist.