

Funktionentheorie I

Zum Selbsttesten: Versuchen Sie die Aufgaben ohne Nachzuschlagen in angemessener Zeit (ca. 3h) zu lösen. **Abgabe: Dienstag, 27. Juli, 12.00 Uhr in den Kasten**

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Bild der Geraden a) $\operatorname{Re} z = 0$, b) $\operatorname{Im} z = 0$, c) $\operatorname{Re} z = 1$, d) $\operatorname{Im} z = 1$, und damit des Einheitsquadrates $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ unter der Möbius-Transformation $T(z) = \frac{z-1}{z+i}$ mit möglichst geringem Rechenaufwand.

Aufgabe 2

Berechnen Sie

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos \theta \sin \theta} \quad b) \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2 + x} dx \quad (0 < \alpha < 1)$$

mit dem Residuensatz.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation T , die $\mathbb{D} \setminus [0, \rho]$ ($0 < \rho < 1$), auf $\mathbb{D} \setminus [-r, r]$ ($0 < r < 1$) abbildet und berechnen Sie r in Abhängigkeit von ρ .

Aufgabe 4

Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ holomorph und $f(0) = 1$. Zeigen Sie

$$|f(z)| \leq \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2 \quad \text{in } \mathbb{D} \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 4.$$

Wann tritt Gleichheit in einer der beiden Ungleichungen auf?

Aufgabe 5

Bestimmen Sie eine konforme Abbildung von $\{z : \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ auf \mathbb{D} , die $(-\infty, 0)$ auf $(-1, 1)$ abbildet.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Spiegelpunkt von z an dem Hyperbelast $xy = 1$ ($x > 0, y > 0$). Welche Punkte können gespiegelt werden? Geben Sie eine konforme Abbildung von $\{z = x + iy : x > 0, y > 0, xy < 1\}$ und von $\{z = x + iy : x > 0, y > 0, xy > 1\}$ jeweils auf \mathbb{D} an.

Aufgabe 7

Das Polynom $p(z) = z^8 - 24z^5 + iz - \frac{i+1}{16}$ hat insgesamt 8 Nullstellen. Wieviele davon liegen in

$$a) |z| < \frac{1}{4} \quad b) \frac{1}{4} < |z| < 2 \quad c) 2 < |z| < 3?$$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils den Typ der Singularität und das Residuum für

$$a) f(z) = \frac{\sin z}{1 - \cosh(z^2)}, \quad z = 0$$

$$b) f(z) = \frac{1}{1 - \cos z} - \frac{1}{1 - \cosh z}, \quad z = 0$$

$$c) f(z) = e^{-1/z^2}, \quad z = 0$$

Welche dieser Funktionen besitzen eine Stammfunktion in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$?