Prof. Dr. Franz Kalhoff Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 0 SS 2004

Bemerkung: Dieses Blatt 0 ist nicht Teil der bewerteten Übungen, sondern dient als Nachdenkzettel für die erste Vorlesungswoche. Aufgabe 1

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{(n,n)}$ definieren wir (siehe Vorlesung) die Spur von A durch $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $\mathrm{Spur} : K^{(n,n)} \to K$ eine K-lineare Abbildung ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen
   i) $\mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B) = \mathrm{Spur}(AB)$ für alle $A, B \in K^{(n,n)}$.
   ii) $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für alle $A, B \in K^{(n,n)}$.
   iii) $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$ für alle $A, B \in K^{(n,n)}$.
   iv) $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$ für alle invertierbaren Matrizen $A \in GL_n(K)$.
   v) $\mathrm{Spur}(A^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)^{-1}$ für alle invertierbaren Matrizen $A \in GL_n(K)$ mit $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$.

Aufgabe 2

Es sei V ein n dimensionaler K-Vektorraum und L ein Endomorphismus von V, zeigen Sie:

a) Es existiert genau ein $s \in K$, so dass für alle $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ und alle Determinantenformen $D : V^n \to K$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} D\left(v_1, \dots, v_{i-1}, L(v_i), v_{i+1}, \dots, v_n\right) = s \cdot D(v_1, \dots, v_n)\ .$$

   Die Zahl s heisst die Spur von L und wird mit $s = \mathrm{Spur}(L)$ bezeichnet.

b) Ist A eine Darstellungsmatrix von L bezgl. einer Basis von V, so gilt $\mathrm{Spur}(L) = \mathrm{Spur}(A)$.

c) Es sei $\mathcal{L}(V)$ die Menge aller Endomorphimen von V, dann ist $L \mapsto \mathrm{Spur}(L)$ eine Linearform auf $\mathcal{L}(V)$.

d) $\mathrm{Spur}(L_1 \circ L_2) = \mathrm{Spur}(L_2 \circ L_1)\ \forall\ L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

Aufgabe 3

Es sei $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ der Körper mit den beiden Anordnungen $\leq$ und $\leq^*$ aus der Vorlesung (6.37e). Geben Sie einen Endomorphismus $L : K^3 \to K^3$ an, der bzgl. der einen Anordnung orientierungstreu und bzgl. der anderen Anordnung orientierungsumkehrend ist.

Aufgabe 4

Es sei V ein Vektorraum und $L : V \to V$ eine lineare Abbildung. Ferner sei 1 ein Eigenwert der linearen Abbildung $L^9 - L^6 + L^3$. Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert der Abbildungen L^{12n} mit $n \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 5

Es sei V ein K-Vektorraum und $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

a) Zeigen Sie, ist V endlich dimensional, so haben $L_1 \circ L_2$ und $L_2 \circ L_1$ die gleichen Eigenwerte.

b) Geben Sie zwei Endomorphismen L_1, L_2 eines nicht endlich dimensionalen K-Vektoraumes V an, so dass $L_1 \circ L_2$ und $L_2 \circ L_1$ nicht die gleichen Eigenwerte besitzen.