Prof. Dr. Franz Kalhoff Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 1 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $V = R[a,b]$, mit $a < b$, die Menge der reellen, (beschränkt) integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $I = [a,b]$, und wir definieren [vgl. Beispiel (7.2)(d) aus der Vorlesung]

$$F : V \times V \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx} \quad .$$

Zeigen Sie, dass F eine symmetrische Bilinearform auf V ist (, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist braucht hier nicht gezeigt werden).

Ist F positiv definit auf dem Untervektorraum $W := C[a,b] \subset V$ von V ($C[a,b]$ ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf I) ?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, $V = K^{(n,n)}$ und $F : V \times V \to K$ definiert durch $F(A,B) := \mathrm{Spur}(AB)$.

a) Zeigen Sie, dass F eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform ist.
b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n \subset V$, die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen, ein Untervektorraum von V ist.
c) Beweisen Sie für angeordnete Körper K, dass (die Einschränkung von) F auf Sym_n positiv definit ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Radikal einer Bilinearform F auf einem K-Vektorraum V stets ein Untervektorraum von V ist. In den speziellen Fällen $V = K^3$ und

$$F_1\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
$$F_2\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) := x_1y_3 + x_3y_1$$

berechnen Sie

a) $\mathrm{Rad}F_1$ und $\mathrm{Rad}F_2$,
b) alle bzgl. F_1 isotropen Vektoren für $K = \mathbb{F}_2$,
c) alle bzgl. F_2 isotropen Vektoren für $K = \mathbb{F}_3$,
d) alle bzgl. F_2 zu $e_1 := (1,0,0)$ polaren Vektoren für $K = \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Auf $V = \mathbb{R}^4$ sei die quadratische Form Q definiert durch

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 9x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 2x_2x_3 + 18x_2x_4 - 8x_3x_4 \ .$$

a) Geben Sie die Formmatrix G von Q bzgl. der Standardbasis von V an.
b) Geben Sie die Koordinatentransformationsmatrix und die Basistransformationsmatrix von der Standardbasis zu der Basis

$$\tilde{a}_1 := (1,0,0,0), \tilde{a}_2 := (-3,1,-1,0), \tilde{a}_3 := (1,-1,-1,0), \tilde{a}_4 := (8,-1,3,-1)$$

von V an.
c) Berechnen Sie die Formmatrix $\tilde{G}$ von Q bzgl. der Basis $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_4$ aus b).

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 30.04.2003, 10:00 Uhr.