Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 10 SS 2004

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und $L : V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit nur positiven Eigenwerten.

a) Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{n}\operatorname{spur}(L) \geq \sqrt[n]{\det(L)}.$$

b) Zeigen Sie, dass in Aufgabenteil a) genau dann Gleichheit gilt, wenn L eine Streckung ist.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum $K^{\mathbb{N}}$ der Folgen in K. Die Linearform $\varepsilon_i \in V^*$ mit $\varepsilon_i\left((a_j)_{j\in\mathbb{N}}\right) := a_i$ heißt die i'te Koordinatenform auf V $(i \in \mathbb{N})$. Ferner sei $S := \operatorname{sp}\{\varepsilon_i |\ i \in \mathbb{N}\} \subset V^*$. Zeigen Sie $S^\perp = \{0\}$ und $(S^\perp)^\perp = V^* \neq S$.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es sei V eine 3-dimensioanler, euklidischer Vektorraum, $\alpha, \beta, \gamma \in V^*$ drei von der Nullform verschiedene Linearformen, A, B, C jeweils der Kern von α, β bzw. γ und S_A, S_B, S_C bezeichne die Spiegelungen an den Hyperebnen A, B, C. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) α, β, γ sind linear abhängig.
b) A, B, C haben eine Gerade gemeinsam.
c) $S_A \circ S_B \circ S_C = S_D$ für eine geeignete Hyperebene D.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A bzgl. der Standardmetrik und der Standaradbasis des $\mathbb{R}^4$ einen normalen Endomorphismus des $\mathbb{R}^4$ beschreibt.
b) Berechnen Sie die Normalform C_0 und eine zugehörige Basis.
c) Entscheiden Sie, ob der Endomorphismus aus Aufgabenteil a) eine Ähnlichkeit ist.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 02.07.2004, 10:00 Uhr.