Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf
Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 11 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien V ein euklidischer Vektorraum endlicher Dimension, $a \in V$ ein Vektor der Länge Eins und $G := b + \mathrm{sp}(a)$, $b \in V$, eine Gerade. Zeigen Sie, dass jede involutorische Bewegung, die genau die Punkte der Geraden G festhält, die Form

$$S_G : V \to V,\ v \mapsto 2\langle v, a\rangle a - v + 2(b - \langle b, a\rangle a)$$

besitzt. S_G heißt die Spiegelung an der Geraden G.

Anleitung: Zeigen Sie zuerst für Bewegungen φ, ψ die folgenden Aussagen ($p \in V$ heißt Fixpunkt von φ, wenn $\varphi(p) = p$ ist).

a) Ist H eine Gerade durch den Nullpunkt und L eine involutorische Isometrie, die genau die Punkte der Geraden H festhält, so existiert eine ON-Basis von V, so dass L durch die Matrix $A := \mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 1)$ beschrieben wird.

b) Es sei $a \in V$ mit $|a| = 1$, $H = \mathrm{sp}(a)$, dann wird die Isometrie L aus Aufgabenteil a) durch die folgende Abbildung S_H beschrieben:

$$S_H : V \to V,\ v \mapsto 2\langle v, a\rangle a - v.$$

c) φ involutorisch $\Leftrightarrow$ $\psi\varphi\psi^{-1}$ involutorisch.

d) $p \in V$ Fixpunkt von φ $\Leftrightarrow$ $\psi(p)$ Fixpunkt von $\psi\varphi\psi^{-1}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\mathbb{C}$-Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

a) Zeigen Sie, dass V auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und dass $v_1, v_2, \ldots, v_n, \mathbf{i}v_1, \mathbf{i}v_2, \ldots, \mathbf{i}v_n$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ($\mathbf{i}^2 = -1$).

b) Es sei $L : V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix C bzgl. der $\mathbb{R}$-Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n, \mathbf{i}v_1, \mathbf{i}v_2, \ldots, \mathbf{i}v_n$ von V. Zeigen Sie:

i) $$L \text{ ist } \mathbb{C}-\text{linear} \quad \Leftrightarrow \quad C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \text{ mit geeigneten } A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}.$$

ii) $$L \text{ ist } \mathbb{C}-\text{antilinear} \quad \Leftrightarrow \quad C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \text{ mit geeigneten } A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}.$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein abzählbares UN-System des unitären Vektorraumes V. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $U_k := \mathrm{sp}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Dann gilt $V = U_k \oplus U_k^\perp$. Ferner sei $P_k : V \to U_k$ die senkrechte Projektion von V auf U_k. Zeigen Sie:

a) Für alle $v \in V$ gilt: $P_k(v) = \sum_{i=1}^{k} H(v, v_j)v_j$.

b) Für alle $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ und $v \in V$ gilt:
$$\left| v - \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i \right|^2 \geq \left| v - \sum_{i=1}^{k} H(v, v_i)v_i \right|^2 = |v|^2 - \sum_{i=1}^{k} |H(v, v_i)|^2 \geq 0$$
wobei in der ersten Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn $\xi_i = H(v, v_i)$, $1 \leq i \leq k$, ist.

c) Es gilt die *Bessel*sche Ungleichung:
$$\sum_{i=1}^{\infty} |H(v, v_i)|^2 \leq |v|^2.$$

(Die Größen $H(v, v_i)$ heißen die komplexen Fourier-Koeffizienten von v bzgl. $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{A} := \mathrm{AG}(V, K) := (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der affine Raum über V. Beweisen Sie den Strahlensatz, d.h. die folgende Aussage:

Sind $G, H \in \mathcal{G}$ zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt $p \in \mathcal{P}$ schneiden, und $a, b \in G$, $c, d \in H$ Punkte mit a, b, c, d, p paarweise verschieden, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $\overline{a, c}$ ist parallel zu $\overline{b, d}$.

b) $\mathrm{TV}(p, a; b) = \mathrm{TV}(p, c; d)$.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 09.07.2004, 10:00 Uhr.