Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 12 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1) := AG(V, K)$, $(\mathcal{P}_2, \mathcal{G}_2) := AG(W, K)$ affine Räume, $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Ist φ affin, so gilt für alle $a_0 \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_k \in \mathcal{P}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$:
$$\varphi(a_0 + \alpha_1 b_1 \ldots + \alpha_k b_k) = \varphi(a_0) + \alpha_1 \varphi'(b_1) \ldots + \alpha_k \varphi'(b_k).$$

b) φ ist genau dann affin, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_k \in \mathcal{P}$ und $\beta_0, \ldots, \beta_k \in K$ mit $\sum_{j=0}^{k} \beta_j = 1$ gilt:
$$\varphi(\beta_0 a_0 + \ldots + \beta_k a_k) = \beta_0 \varphi(a_0) + \ldots + \beta_k \varphi(a_k).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) := AG(V, K)$ ein endlich dimensionaler affiner Raum. Eine affine Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heißt *Dilatation*, wenn $\varphi(G)$ für jede Gerade $G \in \mathcal{G}$ echt parallel zu G ist. Beweisen Sie:

a) φ ist genau dann eine Dilatation, wenn ein $\lambda \in K$ mit $\varphi' = \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ exisitert.
b) φ ist Dilatation $\Rightarrow$ Entweder besitzt φ genau einen Fixpunkt oder φ ist eine Translation.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) := AG(V, K)$ der affine Raum über dem endlich dimensionalen K-Vektorraum V mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass φ genau dann eine Affinität ist, wenn für alle affin abhängigen Punktetripel $a, b, c \in \mathcal{P}$ mit $a \neq b$ gilt:

i) $\varphi(a), \varphi(b)$ und $\varphi(c)$ sind affin abhängig und $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.
ii) $\mathrm{TV}(a, b; c) = \mathrm{TV}(\varphi(a), \varphi(b); \varphi(c))$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien V ein 2-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) := AG(V, \mathbb{R})$ der affine Raum über V. Ein (geordnetes) Punktetripel (a, b, c) heißt *Dreieck*, wenn $a, b, c \in \mathcal{P}$ affin unabhängig sind. Zwei Dreiecke (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen *kongruent*, wenn eine Bewegung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mit $\varphi(a_1) = a_2, \varphi(b_1) = b_2$ und $\varphi(c_1) = c_2$ existiert. Zeigen Sie:

a) Sind zwei Dreiecke kongruent, so ist die zugehörige Bewegung eindeutig bestimmt.

b) (SSS): Die Dreiecke (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) sind genau dann kongruent, wenn gilt:
$d(a_1, b_1) = d(a_2, b_2), d(b_1, c_1) = d(b_2, c_2)$ und $d(a_1, c_1) = d(a_2, c_2)$

c) (SWS): Die Dreiecke (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) sind genau dann kongruent, wenn gilt:
$d(a_1, b_1) = d(a_2, b_2), \measuredangle(a_1 - b_1, c_1 - b_1) = \measuredangle(a_2 - b_2, c_2 - b_2)$ und $d(b_1, c_1) = d(b_2, c_2)$

(Zusatz:
- Gelten die Aussagen a),b),c) auch, wenn $\dim(V) > 2$ ist ?
- Wann sind die Dreiecke (a, b, c) und (b, a, c) kongruent?)

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 16.07.2004, 10:00 Uhr.