Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 13 SS 2004

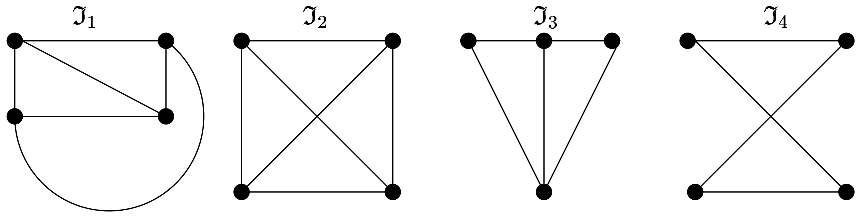
Aufgabe 1 (4 Punkte)

Im affinen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) := AG(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ seien bzgl. der Standardbasis e_1, e_2, e_3 für $r \in \mathbb{R}$ folgende Quadriken C_r gegeben

$$C_r := \left\{ p = xe_1 + ye_2 + ze_3 \;\middle|\; r(y-1)^2 + r(r-1)z^2 + 4xy + 2x = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Affinität $\varphi_r : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, die C_r auf Normalform bringt, und geben Sie den Typ von C_r an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)



a) Welche der oben abgebildeten Inzidenzräume (mit jeweils vier Punkten) sind isomorph?

b) Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Inzidenzräume mit fünf Punkten.

c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe Inzidenzräume mit sechs Punkten und gleicher Geradenzahl an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{A} := (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine endliche affine Ebene. Die *Ordnung von* $\mathcal{A}$ ist die Anzahl der mit einer festen Gerade $G \in \mathcal{G}$ inzidierenden Punkte und wird mit $\text{ord}(\mathcal{A})$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $\text{ord}(\mathcal{A}) = n$.

b) $|\mathcal{P}| = n^2$.

c) Jeder Punkt $p \in \mathcal{P}$ liegt auf $n+1$ (paarweise verschiedenen) Geraden.

d) $|\mathcal{G}| = n^2 + n$.

e) $\mathcal{G}$ zerfällt in $n+1$ Parallelenbüschel.

f) Jedes Parallelenbüschel enthält n Geraden.

Welche Ordnung besitzt $AG(\mathbb{F}_p^2, \mathbb{F}_p)$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene und $U \in \mathcal{G}$. Für $G \in \mathcal{G} \setminus \{U\}$ sei $G^- := G \setminus \{GU\}$. Weiter setzen wir $\mathcal{P}^- := \mathcal{P} \setminus U$ sowie $\mathcal{G}^- := \{G^- \mid G \in \mathcal{G},\ G \neq U\}$. Zeigen Sie:

a) $(\mathcal{P}^-, \mathcal{G}^-)$ ist eine affine Ebene, sie heißt die *Restriktion von* $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ *bzgl.* U.

b) Der projektive Abschluss von $(\mathcal{P}^-, \mathcal{G}^-)$ ist isomorph zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$.

c) Geht man umgekehrt von einer affinen Ebene aus, bildet ihren projektiven Abschluss und dann (wie oben beschrieben) die affine Restriktion bzgl. der uneigentlichen Geraden, so erhält man wieder die affine Ausgangsebene.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 23.07.2004, 10:00 Uhr.