Prof. Dr. Franz Kalhoff Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 2 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Trägheitsindex und die Signatur der reellen Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -7 \\ 1 & -7 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) für $\alpha = 5$,
b) für $\alpha = -17$.
c) Geben Sie in den obigen beiden Fällen jeweils eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, so dass $S^T G S$ Diagonalform besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Auf $V = \mathbb{F}_{11}^4$ sei eine quadratische Form Q gegeben durch

$$Q((x_1, \ldots, x_4)) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 + 5x_3x_4.$$

a) Geben Sie die Formmatrix G von Q bzgl. der Standardbasis an.
b) Bestimmen Sie eine Polarbasis von V und geben Sie die Formmatrix $\tilde{G}$ bzgl. dieser Basis an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei M die Menge aller symmetrischen Matrizen über $\mathbb{C}$. Wir betrachten auf M die Äquivalenzrelation $A \sim B :\Leftrightarrow (A \text{ ist kongruent zu } B)$.

a) Geben Sie für die Äquivalenzklassen $\bar{A} := \{B \in M \mid B \sim A\}$ möglichst einfache Repräsentanten an.
b) Folgern Sie, dass Rang und Dimension des Radikals ein vollständiges Invariantensystem für die Kongruenz von symmetrischen Matrizen über $\mathbb{C}$ bilden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie die folgende Ungleichung für beliebige Vektoren $x, y, z \in V$:

$$|x - y| \cdot |z| \leq |y - z| \cdot |x| + |z - x| \cdot |y|.$$

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 07.05.2003, 10:00 Uhr.