Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 3 SS 2004

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Es sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie:

a) $|v_1 + \ldots + v_n| \leq |v_1| + \ldots + |v_n|$ für alle $v_i \in V$.

b) $|v_1 + \ldots + v_n| = |v_1| + \ldots + |v_n| \Leftrightarrow (\exists\ v \in V,\ \lambda_i \in K$ nicht negativ, mit: $v_i = \lambda_i v)$.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Bezogen auf die Standardkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ sei die quadratische Form Q auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3.$$

a) Zeigen Sie, dass Q positiv definit ist.

b) Berechnen Sie ausgehend von der Standardbasis e_1, e_2, e_3 mit Hilfe des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezgl. der zu Q gehörenden symmetrischen Bilinearform F.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $U \mapsto U^\perp$ eine bijektive Abbildung auf der Menge aller Untervektorräume von V ist.

b) U_1, U_2 seien Untervektorräume von V. Beweisen Sie:

$$i)\ (U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp \qquad ii)\ (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Es sei V die Menge der reellen Folgen $A := (a_1, a_2, \ldots)$ mit $\sum_{i=1}^\infty a_i^2 < \infty$.

a) Zeigen Sie: Mit argumentweiser Addition und skalarer Multiplikation wird V zu einem Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.
(Sie dürfen hier $\left(\sum_{i=1}^\infty a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^\infty a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^\infty b_i^2\right)$ für $A, B \in V$ benutzen. Können Sie das auch beweisen?)

b) Beweisen Sie, dass $\langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ mit $A, B \in V$ ein Skalarprodukt auf V definiert.

c) Mit E_i bezeichnen wir die Folge, deren i'tes Folgenglied gleich Eins ist und deren sämtliche andere Folgenglieder gleich Null sind, d.h. $E_i := (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}, \ldots)$. Zeigen Sie, dass die Familie $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $(V, \langle ., . \rangle)$ bildet.

d) Es sei $U := \mathrm{sp}\left(\{E_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right) \subset V$. Berechnen Sie $U^\perp$ sowie $(U^\perp)^\perp$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 14.05.2004, 10:00 Uhr.

bitte wenden

Sprechstunden:

Prof. Dr. Franz Kalhoff	Raum: 1030	Tel.: -3059	dienstags 12:00 - 13:00 Uhr
Dr. Günter Skoruppa	Raum: 1036	Tel.: -3098	donnerstags 13:00 - 14:00 Uhr
Dr. Frank Klinker	Raum: 1043	Tel.: -5922	mittwochs 11:00 - 12:00 Uhr
Jason Uhing	Raum: 913	Tel.: -3093	mittwochs 14:00 - 15:00 Uhr
Ina Voigt	Raum: 1018	Tel.: -4361	dienstags 13:00 - 14:00 Uhr
Eva Ludwig	Raum: 934	Tel.: -3134	montags 10:00 - 11:00 Uhr
Katrin Siemko	Raum: 1020	Tel.: -3070	dienstags 12:00 - 13:00 Uhr
Holger Bluhm	Raum: 934	Tel.: -3134	dienstags 12:00 - 13:00 Uhr
Uwe Schwerdtfeger	Raum: 1018	Tel.: -4361	n.V.
Michael Kropf	Raum: 1020	Tel.: -3070	donnerstags 10:15 - 11:15 Uhr