Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 4 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $\measuredangle(u, v)$ bezeichne den unorientierten Winkel zwischen $u, v \in V$ $(0 \neq u \neq v \neq 0)$. Beweisen Sie:

a) Die Parallelogramm-Gleichung
$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

b) Den Cosinussatz
$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| \cos(\measuredangle(u, v)).$$

c) Zwei linear unabhängige Vektoren $u, v \in V$ sind genau dann orthogonal, wenn die Diagonalen des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogrammes gleiche Länge besitzen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz (8.27) aus der Vorlesung, also:

a) Die Menge der orthogonalen Matrizen $O(n, \mathbb{R})$ bildet eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$,
b) $A \in O(n, \mathbb{R}) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$,
c) Die Menge der eigentlich orthogonalen Matrizen $SO(n, \mathbb{R})$ bildet eine Untergruppe von $O(n, \mathbb{R})$,
d) $SO(n, \mathbb{R})$ ist sogar ein Normalteiler von $O(n, \mathbb{R})$, und es gilt $O(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R}) \cong C_2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Es sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei euklidischen Vektorräumen V und W. Zeigen Sie:
$$L \text{ ist Isometrie} \;\Leftrightarrow\; \forall\, v \in V : \; |u| = |L(u)|$$

b) Es sei $L : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen, euklidischen Vektorraumes V mit $|\det L| = 1$ und es gelte
$$|u| \leq 1 \Rightarrow |L(u)| \leq 1.$$
Zeigen Sie, dass L eine Isometrie ist.

bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ zwei Basen eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes V.

a) Beweisen Sie:
Haben die Matrizen der Basiswechsel von $a_1, \ldots, a_n$ zu $b_1, \ldots, b_n$ und von $b_1, \ldots, b_n$ zu $a_1, \ldots, a_n$ nur nicht negative Elemente, so existiert eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und positive reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$a_i = \lambda_i b_{\sigma(i)}, \ 1 \leq i \leq n.$$

b) Folgern Sie aus Aufgabenteil a):
Sind zwei n-Parallelotope als Punktmengen gleich, d.h. es gilt

$$P(a_1, \ldots, a_n) = P(b_1, \ldots, b_n),$$

so ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Permutation von $a_1, \ldots, a_n$.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 21.05.2004, 10:00 Uhr.