Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
— Übungen —

Blatt 5 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit ON-Basis $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$. Eine Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt Bewegung, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$d(\varphi(v), \varphi(w)) = d(v, w) \ .$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes $t \in V$ ist die Translation um t, $\tau_t : V \to V,\ v \mapsto v + t$, eine Bewegung.
b) Zeigen Sie, dass jede Bewegung φ von V mit $\varphi(0) = 0$ linear ist, indem Sie folgende Aussagen beweisen:
   i) $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$,
   ii) $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$ ist ON-Basis von V,
   iii) $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(a_i)$ für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler, euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie [vgl. Aufgabe 1]:

a) Jede Bewegung φ von V ist von der Form $\varphi(v) = L(v) + t$ mit $t \in V$ und $L \in O(V)$; und jede solche Abbildung ist eine Bewegung.
b) Die Menge Γ aller Bewegungen von V bildet eine Gruppe bzgl. der Komposition von Abbildungen.
c) Die Menge T der Translationen von V ist ein Normalteiler von Γ mit $\Gamma/T \cong O(V)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Im Polynomring $R := \mathbb{F}_{11}[X]$ seien folgende Polynome gegeben:

$$p_1 := X^4 + 5X^3 + 3X^2 + 6X + 7,\ p_2 := X^3 + 6X^2 + 6,\ p_3 := X + 1.$$

a) Zeigen Sie (ohne Polynomdivision !), dass p_3 die beiden Polynome p_1 sowie p_2 teilt.
b) Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von p_1 und p_2 mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.
c) Finden Sie zwei Polynome q_1 und q_2, so dass gilt: $p_1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -8 & 0 & -12 \\ -3 & -2 & -6 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A und B das gleiche charakteristische Polynom besitzen.
b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A und geben Sie eine Matrix $S \in GL(3, \mathbb{R})$ an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
c) Entscheiden Sie, ob B diagonalisierbar ist.
d) Berechnene Sie $A^k,\ k \in \mathbb{N}$. [Tipp: Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b).]

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 28.05.2004, 10:00 Uhr.