Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 6 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei V ein n dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $H := v_0 + U$ eine affine Hyperebene, d.h. es existiert ein $v_0 \in V$ und ein Untervektorraum U von V mit Dimension $n-1$.

a) Es sei $\varphi \neq \mathrm{id}_V$ eine Bewegung mit $\varphi(v) = v$ für alle $v \in H$. Zeigen Sie, dass φ eine Hintereinanderausführung der Spiegelung an der Hyperebene U und einer (geeigneten) Translation ist. Es gilt also $\varphi(x) = L(x) + t$ mit $t \in V$ und $L = S_u$, wobei $U = \{u\}^{\perp}$ (vgl. 8.22 b) und 8.31). Man nennt deshalb φ die **Spiegelung** an der affinen Hyperebene H und schreibt $\varphi = S_H$.
b) Es sei ψ eine Bewegung von V. Zeigen sie, dass mit H auch $\psi(H)$ eine (affine) Hyperebene von V ist und dass gilt:
$$\psi S_H \psi^{-1} = S_{\psi(H)}.$$
c) Beweisen Sie die affine Fassung des Satzes von *Cartan*: Jede Bewegung von V ist Produkt von höchstens $n+1$ Hyperebenspiegelungen von V.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ seien zwei quadratische Formen P, Q auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch
$P(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3,\ Q(x) = 5x_1^2 + 12x_2^2 + 35x_3^2 - 18x_1x_2 + 28x_1x_3 - 42x_2x_3.$

a) Geben Sie die Formmatrizen der quadr. Formen bzgl. der Standardbasis an und entscheiden Sie, ob die quadr. Formen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind.
b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die P und Q simultan diagonalisiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ eine Matrix vom Rang r, $B \in \mathbb{R}^{(m,r)}$ sowie $C \in \mathbb{R}^{(r,n)}$ Matrizen und es gelte
$$A = BC.$$

a) Zeigen Sie, dass sowohl B als auch C den Rang r besitzen, deshalb nennt man $A = BC$ auch eine **Vollrangzerlegung** von A.
b) Beweisen Sie, dass die Matrizen A, A^T, AA^T, A^TA vom gleichen Rang sind.
c) Folgern Sie, dass die Matrix B^TAC^T invertierbar und $A^- := C^T(B^TAC^T)^{-1}B^T$ die *Moore-Penrose*-Inverse von A ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende reelle Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $r = \operatorname{rang} A$ und berechnen Sie die *Moore-Penrose*-Inverse von A mit Hilfe von Aufgabe 3.

Anleitung: Sie erhalten eine Vollrangzerlegung von A, indem Sie r unabhängige Spalten von A als Matrix $B \in \mathbb{R}^{(3,r)}$ auffassen und dann $C \in \mathbb{R}^{(r,3)}$ berechnen.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 04.06.2004, 10:00 Uhr.