Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 7 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{(n,n)}$ eine Matrix.

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und A^T die gleichen Eigenwerte besitzen.
b) Beweisen Sie, dass eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für $1 \leq j \leq n$ den Eigenwert 1 besitzt.
c) In einem System von n Fischteichen $T_1, \ldots, T_n$ werde die Wasserverteilung folgendermaßen geregelt:

Aus dem Teich T_j wird jeden Abend der Bruchteil γ_{ij} seines momentanen Wasserinhaltes in den Teich T_i umgeleitet ($1 \leq i, j \leq n$). Dabei seien Änderungen des Gesamtwassermenge durch Regen und Verdunstung vernachlässigbar.

Zeigen Sie: Man kann die n Teiche so mit Wasser füllen, dass mindestens ein Teich nicht leer ist und trotz obiger Umfüllprozedur der Wasserinhalt jedes Teiches konstant bleibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $L : V \to V$ ein Endomorphismus eines n dimensionalen Vektorraumes V. Beweisen Sie:

a) Analog zur Kernsequenz (vgl. Vorlesung) existiert die Bildsequenz
$$V = \mathrm{Bild}(L^0) \supset \mathrm{Bild}(L) \supset \mathrm{Bild}(L^2) \supset \ldots$$
und diese wird vom gleichen Index an konstant wie die Kernsequenz.
b) Ist V euklidisch und L symmetrisch, so ist der Fittingsindex von L kleiner gleich 1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $T : V \to V$ nilpotenter Endomorphismus eines n dimensionalen K Vektorraumes V vom Nilpotenzgrad μ. Zeigen Sie:

a) T besitzt nur den Eigenwert 0.
b) Der Endomorphismus $S := \mathrm{id}_V + T + \ldots + T^{\mu-1}$ ist bijektiv. (Finden Sie den inversen Endomorphismus!)
c) Ist $L : V \to V$ ein regulärer Endomorphismus mit $LT = TL$, so ist $L + T$ regulär. (Gilt hier auch die Umkehrung?)
d) Ist $R : V \to V$ ein (weiterer) nilpotenter Endomorphismus von V vom Nilpotenzgrad ν mit $RT = TR$, so sind RT und $R + T$ nilpotente Endomorphismen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei V ein n dimensionaler Vektorraum und $T : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphimus von Nilpotenzgrad k. Zeigen Sie:

a) $W_i := \mathrm{Kern}(T^i)$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ein T-invarianter Unterraum von V.
b) Ist $k = n$, so ist jeder T-invarianter Unterraum $W \subset V$ von der Form $W := \mathrm{Kern}(T^i)$ für ein geeignetes $i \in \mathbb{N}_0$.
c) Ist $k = n$, so sind alle T-invarianten Unterräume T-irreduzibel.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 11.06.2004, 10:00 Uhr.