Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf
Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

— Übungen —

Blatt 8 SS 2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie eine Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(4,4)}.$$

Geben Sie zusätzlich eine Jordanbasis und die zugehörige Transformationsmatrix (über $\mathbb{C}$) an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A durch

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob A eine Jordan-Normalform besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls selbige über den Körpern

a) $\mathbb{C}$, b) $\mathbb{R}$, c) $\mathbb{F}_2$, d) $\mathbb{F}_3$ und e) $\mathbb{F}_7$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und folgende Matrix

$$M_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n,n)}.$$

a) Zeigen Sie, dass $M_n(\lambda)$ und $(M_n(\lambda))^T$ ähnlich sind, indem Sie eine Matrix $S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $S^{-1}M_n(\lambda)S = M_n(\lambda)^T$ angeben.
b) Folgern Sie, dass jede quadratische Matrix über $\mathbb{C}$ ähnlich zu ihrer transponierten Matrix ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $L : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraumes V, ferner zerfalle das charakteristische Polynom $Ch_L \in K[\lambda]$ von L (über K) in Linearfaktoren. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine Darstellung $L = P + T$ von L, wobei P ein diagonalisierbarer Endomorphismus, T ein nilpotenter Endomorphismus ist und $PT = TP$ gilt.
b) Ist $L = P' + T'$ eine (weitere) Zerlegung wie in Aufgabenteil a), so gilt $P = P'$ und $T = T'$, d.h. die Darstellung aus Aufgabenteil a) ist eindeutig.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 18.06.2004, 10:00 Uhr.