

## Lineare Algebra und analytische Geometrie II

### — Übungen —

Blatt 9

SS 2004

#### Aufgabe 1

( 4 Punkte)

Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $L : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus und das charakteristische Polynom von  $L$  zerfalle über  $K$  in Linearfaktoren. Weiter sei  $\lambda$  Eigenwert von  $L$ ,  $d_\lambda$  die geometrische Vielfachheit,  $d'_\lambda$  die algebraische Vielfachheit und  $f_\lambda$  der Index von  $\lambda$ . Zeigen Sie:

- $d_\lambda \leq d'_\lambda$ ,
- $f_\lambda \leq d'_\lambda$ ,
- in Aufgabenteil a) gilt genau dann Gleichheit, wenn  $L|_{E'(\lambda)}$  diagonalisierbar ist,
- in Aufgabenteil b) gilt genau dann Gleichheit, wenn  $E'(\lambda)$  irreduzibel ist.

#### Aufgabe 2

( 4 Punkte)

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{(4,4)}$  gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die reelle Jordan-Normalform von  $A$  und eine zugehörige Jordanbasis.

(Tipp: Berechnen Sie zuerst die komplexen Eigenwerte von  $A$ .)

#### Aufgabe 3

( 4 Punkte)

Es seien  $W, V$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume und  $L : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

Beweisen Sie, dass  $L$  und  $L^*$  denselben Rang besitzen.

#### Aufgabe 4

( 4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem  $(G)$  und das zugehörige homogene transponierte System  $(\tilde{H})$ :

$$(G) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad (\tilde{H}) : \begin{cases} a_{11}\xi_1 + \dots + a_{p1}\xi_p = 0 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n}\xi_1 + \dots + a_{pn}\xi_p = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $(G)$  genau dann lösbar ist, wenn für alle Lösungs- $p$ -Tupel  $(\xi_1, \dots, \xi_p)$  von  $(\tilde{H})$  gilt:

$$\xi_1 b_1 + \dots + \xi_p b_p = 0.$$

**Punkte:** Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

**Abgabe:** Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Freitag, 25.06.2004, 10:00 Uhr.