UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 2. November 2004

Analysis I für Lehramt Gymnasium

4. Übungsblatt, WS 2004/05

Abgabe bis Montag, 8. November 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und positive reelle Zahlen x_k $(k = 1, ..., n)$ folgende Abschätzung:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq n^2$$

Aufgabe 2

Es seien a und b positive reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$

b) $\left|\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right| \leq \sqrt[n]{|a-b|}$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$

c) $a + b \leq \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$

Hinweise: a) Binomischer Satz. b) Zeigen Sie für $a \geq b$ mit a) $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{a-b} + \sqrt[n]{b}$.

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sqrt[3]{16}\sqrt[6]{81}$

b) $\dfrac{a^3\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}$ $\qquad (a > 0)$

c) $\dfrac{12}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{4a^2 - 12a + 9}$ $\qquad (a \in \mathbb{R})$

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Für $x > -1$ und $r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ gilt: $\quad (1 + x)^r \leq 1 + rx$

b) Der Inhalt eines Rechtecks von gegebenem Umfang wird für das Quadrat am größten.

Für welche x gilt in a) das Gleichheitszeichen?