Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 16. November 2004

Analysis I für Lehramt Gymnasium

6. Übungsblatt, WS 2004/05

Abgabe bis Montag, 22. November 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen:

a) $\sqrt[n]{3n^2+4n}$

b) $\sqrt[2n]{3^n+4^n}$

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$

d) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

Hinweis: Schätzen Sie die Folge in d) mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung ab.

Aufgabe 2

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$ und benutzen Sie diese und die zugehörige Abschätzung für $n!$ nach unten zur Bestimmung der Grenzwerte von:

a) $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

b) $\dfrac{n^n}{3^n n!}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ näherungsweise, indem Sie fünf Schritte

a) des Intervallhalbierungsverfahrens mit den Startwerten $a_0 = \frac{3}{2}$ und $b_0 = 2$ bzw.

b) des Heron-Verfahrens mit dem Startwert $a_0 = \frac{3}{2}$ durchführen.

Aufgabe 4

Es sei $1 < a_1 < 2$ und es sei (a_n) rekursiv definiert durch $a_{n+1} := a_n^2 - 2a_n + 2$.

a) Zeigen Sie $1 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Beweisen Sie, dass (a_n) monoton fallend ist.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).