Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 23. November 2004

Analysis I für Lehramt Gymnasium

7. Übungsblatt, WS 2004/05

Abgabe bis Montag, 29. November 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die Folgen (a_n) und (b_n) alle Häufungswerte und geben Sie zu jedem Häufungswert eine konvergente Teilfolge an. Dabei sei

a) (a_n) definiert durch $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n + 1}{2n - 1}$ und

b) (b_n) definiert durch $b_n = (-3)^n + (-5)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Aufgabe 2

a) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen und bestimmen Sie für die darin enthaltenen Folgen alle Häufungswerte:

1) Die Folge $\dfrac{(-1)^n\, n + 1}{n + 1}$ ist konvergent.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n\, 8n^3 - 2}{(-1)^n 2n^3 + 1} = 4$.

b) Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge (c_n), die definiert ist durch:

$$c_n := (-1)^n a_n + b_n$$

Ist (c_n) konvergent?

Aufgabe 3

Es sei (a_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+1} = b$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+2} = c$. Zeigen Sie, dass (a_n) keine weiteren Häufungswerte besitzt. In welchem Fall ist (a_n) konvergent?

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

a) Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, dann ist (c_n) mit $c_n = a_n + b_n$ divergent.

b) Gilt $a_n^2 \to 1$ $(n \to \infty)$, so auch $a_n \to 1$ $(n \to \infty)$.

c) Gilt $a_{2n} \to a$ und $a_{3n} \to b$ $(n \to \infty)$, so folgt $a = b$.

d) Gilt $a_{2n} \to a$ und $a_{4n+1} \to b$ $(n \to \infty)$, so folgt $a = b$.