Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 7. Dezember 2004

Analysis I für Lehramt Gymnasium

9. Übungsblatt, WS 2004/05

Abgabe bis Montag, 13. Dezember 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Gegeben seien die Funtionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g :]-\infty, 0[\cup]0, 1] \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{\sin x} & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x^3 + \sqrt{1-x^2}} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig in 0 ist, indem Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ auswerten.

b) Prüfen Sie g auf Stetigkeit. Läßt sich g in 0 stetig ergänzen?

Aufgabe 2

Gegeben sei das Polynom $P(x) = 4x^3 - 21x^2 + 16x + 5$. Zeigen Sie (ohne die Nullstellen auszurechnen), daß P in $[-2, 0]$ und $[0, 2]$ jeweils eine Nullstelle besitzt, und führen Sie ausgehend von diesen Intervallen jeweils 4 Schritte der Intervallhalbierung durch, um eine Näherung für diese Nullstellen zu bekommen. Besitzt P noch weitere Nullstellen?

Aufgabe 3

a) Der Grad n des Polynoms $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ sei ungerade, und es seien $a < b$ gegeben mit $P(a) > 0$ und $P(b) < 0$. Zeigen Sie, dass P mindestens drei verschiedene Nullstellen besitzt.

b) Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = x_0$. (*Hinweis:* Untersuchen Sie $f(x) - x$.)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie (falls existent) Minimum und Maximum von f auf I (d.h. von $f(I)$) für:

a) $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ $\qquad$ $I = [0, 1]$ bzw. $I =]0, 1]$ bzw. $I =]0, 1[$

b) $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ $\qquad$ $I =]0, \pi]$ bzw. $I =]0, \pi[$

c) $h(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} + x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $I = [-1, 1]$