Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 11. Januar 2005

Analysis I für Lehramt Gymnasium

12. Übungsblatt, WS 2004/05

Abgabe bis Montag, 17. Januar 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz folgende Aussagen:

a) $e^x > 1 + x$ für $x > 0$ und $x < 0$

b) $\log(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ für $x > -1$

c) $(1+x)^a \geq 1 + a\,x$ für $x \geq -1$ $(a \geq 1)$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \cos x$. Zeigen Sie:

a) Es ist f streng monoton fallend und die Umkehrfunktion arccos existiert in $[-1, 1]$.

b) Für $|y| < 1$ ist arccos differenzierbar mit $(\arccos y)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Zusatz: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g(x) := \arcsin x + \arccos x$ und machen Sie damit eine Aussage über die Funktion g.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \cosh x$. Zeigen Sie:

a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = \sinh x$.

b) Für $x \geq 0$ ist f streng wachsend und die Umkehrfunktion Arcosh existiert in $[1, \infty[$.

c) Es ist $\operatorname{Arcosh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ für $y \geq 1$ und $(\operatorname{Arcosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ für $y > 1$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{2x-1} - e^x}{\sin(\pi x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{1 - \cosh 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{x^a}$ für $a > 0$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sin x}{3x + \cos x}$