Blatt 3 / Analysis III

Aufgabe 10

$U \subseteq \mathbb{R}^d$ Sterngebiet mit Sternpunkt x_0.

$\gamma_1 : [a,b] \to U$ sei definiert durch $\gamma_1(t) := x_0$, $t \in [a,b]$

$\gamma_2 : [a,b] \to U$ geschlossene Kurve mit $\gamma_2(a) = \gamma_2(b) = x_0$

Gesucht: Homotopie zwischen γ_1 und γ_2

Definiere: $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ durch

$$H(t,s) := x_0 + s(\gamma_2(t) - x_0), \quad (t,s) \in [a,b] \times [0,1]$$

⌈ Da für festes $t \in [a,b]$

$$[0,1] \ni s \longmapsto x_0 + s(\gamma_2(t) - x_0)$$

die Verbindungsstrecke von x_0 und $\gamma_2(t) \in U$ ist und U sternförmig bzgl. x_0 ist, bildet H nach U ab. ⌋

H ist Homotopie, denn es gelten:

H ist stetig

$$\left.\begin{aligned} H(t,0) &= x_0 = \gamma_1(t) \\ H(t,1) &= \gamma_2(t) \end{aligned}\right\} \ \forall\, t \in [a,b]$$

$$\left.\begin{aligned} H(a,s) &= x_0 + s(x_0 - x_0) = x_0 \\ H(b,s) &= x_0 + s(x_0 - x_0) = x_0 \end{aligned}\right\} \ \forall\, s \in [0,1]$$

Aufgabe 11 Windungszahlen

$h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $r : [0,1] \to \,]0,\infty[$ stetig differenzierbar mit

$r(0) = r(1) = 1$ und $h(0) = 0$, $h(1) = m \cdot 2\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$

$\gamma_r(t) = (r(t)\cos(h(t)), r(t)\sin(h(t)))$, $t \in [0,1]$

geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\gamma_r(0) = (r(0)\cos(h(0)), r(0)\sin(h(0))) = (\cos 0, \sin 0) = (1,0)$$

$$\gamma_r(1) = (r(1)\cos(h(1)), r(1)\sin(h(1))) = (\cos(2\pi m), \sin(2\pi m)) = (1,0)$$

(a) Es sei $r \equiv 1$.

Beh.: $n_{\gamma_1}(0) = m$,

wobei $n_{\gamma_1}(0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$

Bew.:
$$n_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\cos^2(h(t)) + \sin^2(h(t))}\big(-\sin(h(t))\cdot(-\sin(h(t))\cdot h'(t)) + \cos(h(t))\cdot\cos(h(t))\cdot h'(t)\big)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (\sin^2(h(t))\,h'(t) + \cos^2(h(t))\cdot h'(t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 h'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}(h(1) - h(0))$$

$$= \frac{1}{2\pi}(2\pi m - 0) = m$$

(b) (1) Beh.: γ_r und γ_1 sind in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ homotop

Bew.: Definiere $H: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ durch

$$H(t,s) := \gamma_r(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_r(t)) \quad , \quad (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$$

$$\Gamma\; H(t,s) = (r(t)\cos(h(t)) + s(\cos(h(t)) - r(t)\cos(h(t))) ,$$
$$r(t)\sin(h(t)) + s(\sin(h(t)) - r(t)\sin(h(t))))$$
$$= (\cos(h(t))(r(t) + s - s r(t)), \sin(h(t))(r(t) + s - s r(t)))$$
$$= (\cos(h(t))\underbrace{(s + (1-s) r(t))}_{>0}, \sin(h(t))\underbrace{(s+(1-s) r(t))}_{>0})$$
(da $r(t) > 0\ \forall t\in[0,1]$)

H bildet ab nach $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ ⅃

H ist stetig, und es gelten

$$\left.\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_r(t) \\ H(t,1) &= \gamma_1(t) \end{aligned}\right\} \forall t\in[0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} H(0,s) &= \gamma_r(0) + s(\gamma_1(0) - \gamma_r(0)) = \gamma_r(0) \\ H(1,s) &= \gamma_r(1) + s(\gamma_1(1) - \gamma_r(1)) = \gamma_r(1) \end{aligned}\right\} \forall s\in[0,1]$$

H ist Homotopie zwischen γ_r und γ_1 $\Rightarrow$ Beh.

(2) Beh.: Es gilt $n_{\gamma_r}(0) = n$

Bew.: Die Windungsform $\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$ ist geschlossene Pfaffsche Form auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ (siehe Vorlesung)

γ_r und γ_1 homotop in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ nach (1)

Mit Satz 1.16 der Vorlesung folgt: $\int_{\gamma_r}\omega = \int_{\gamma_1}\omega$

$$\Longrightarrow n_{\gamma_r}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1}\omega = n_{\gamma_1}(0) = n$$

Aufgabe 12

$A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und $Q := \{x \in \mathbb{R}^d : x^T A x = 1\} \neq \emptyset$

(a) Beh.: Q ist $(d-1)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit vom $\mathbb{R}^d$

Bew.: $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := x^T A x - 1 = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} x_i x_j - 1 \quad , x \in \mathbb{R}^d$$

f ist stetig differenzierbar, und es gilt

$$df(x) = \left(2 \sum_{j=1}^{d} a_{1j} x_j, \dots, 2 \sum_{j=1}^{d} a_{dj} x_j\right) = 2x^T A \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

(A symmetrisch!)

Es ist $Q \cap \mathbb{R}^d = Q = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = 0\}$, und für $x \in Q$ gilt $df(x) \neq 0$, denn:

Ist für $x \in \mathbb{R}^d$ $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j = 0$ für alle $i = 1, \dots, d$, so folgt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j - 1 = 0 - 1 = -1 \text{ , also } x \notin Q.$$

Also ist die Bedingung ② aus Satz 7.3 der Vorlesung erfüllt $\Rightarrow$ Q ist $(d-1)$-dim. differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$

(b) Nach (a) und Satz 7.5 ② der Vorlesung gilt

$$T_a Q = \{v \in \mathbb{R}^d : df(a) \cdot v = 0\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^d : 2a^T A \cdot v = 0\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^d : a^T A \cdot v = 0\}$$

für alle $a \in Q$

Aufgabe 13 Der Torus im $\mathbb{R}^3$

$0 < a < R$

$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = a^2\}$

(a) Beh.: T ist eine 2-dim. kompakte differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

Beweis: ① T ist kompakt:

T ist beschränkt, denn für $(x,y,z) \in T$ gilt $\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq a+R$

$$\Gamma\ (x,y,z) \in T \Rightarrow z^2 \leq (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow |z| \leq a < a+R$$

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = a^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 = a^2 - z^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - R = \sqrt{a^2-z^2} \ \vee\ R - \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2-z^2}$$

$$\text{Somit } |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R + \sqrt{a^2-z^2} \leq a + R \quad \rfloor$$

T ist abgeschlossen, da $T = f^{-1}(\{0\})$ für die stetige Abbildung

$f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - a^2$

(Bei stetigen Abbildungen sind die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen.)

② T 2-dim. differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$:

Verwende Satz 2.3 der Vorlesung und zeige ② in Satz 2.3.

f, definiert wie oben, ist stetig diffbar auf $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$, und es gilt

$$df(x,y,z) = \left(2(\sqrt{x^2+y^2} - R)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 2(\sqrt{x^2+y^2} - R)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 2z \right)$$

für $(x,y,z) \in U$

Es ist $T \cap M = T = \{(x,y,z) \in M : f(x,y,z) = 0\}$,

und für $(x,y,z) \in T$ gilt $df(x,y,z) \neq 0$, denn:

Sei $(x,y,z) \in M$ mit $df(x,y,z) = 0$

Dann $2x - \frac{2Rx}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, $2y - \frac{2Ry}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, $2z = 0$

$\left(\Leftrightarrow x = \frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ $\qquad$ $\left(\Leftrightarrow y = \frac{Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Es folgt $x^2+y^2 = \frac{R^2x^2}{x^2+y^2} + \frac{R^2y^2}{x^2+y^2} = R^2$

Da $z=0$: $(x,y,z) \notin T$

Also ② in Satz 2.3 erfüllt, und T ist 2-dim. differenzierbare Untermannig= faltigkeit von $\mathbb{R}^d$

(b)

$$\gamma(u,v) := \begin{pmatrix} (R+a\cos v)\cos u \\ (R+a\cos v)\sin u \\ a\sin v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Beh.: γ lokale Parameterdarstellung von T

Bew.: Zeige zuerst $\gamma(\mathbb{R}^2) = T$:

Sei $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Dann

$\left(\sqrt{(R+a\cos v)^2\cos^2 u + (R+a\cos v)^2\sin^2 u} - R\right)^2 + a^2\sin^2 v =$

$\left(\sqrt{(R+a\cos v)^2} - R\right)^2 + a^2\sin^2 v =$

$a^2\cos^2 v + a^2\sin^2 v = a^2$

$\Rightarrow \gamma(u,v) \in T$

Sei nun $(x,y,z) \in T$, d.h. $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=a^2 \quad (*)$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}: \quad x = \sqrt{x^2+y^2}\cos u$

$(u \in [0,2\pi[) \quad y = \sqrt{x^2+y^2}\sin u$

Wegen $(*)$ liegt $(\sqrt{x^2+y^2}, z)$ auf Kreis mit Mittelpunkt $(R,0)$ und Radius a

$\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R} \quad : \sqrt{x^2+y^2} = R + a\cos v$

$(v \in [0,2\pi[) \quad z = a \sin v$

<u>Zeige nun</u>: $\operatorname{rang} d\gamma(u,v) = 2$

$$d\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -(R+a\cos v)\sin u \\ (R+a\cos v)\cos u \\ 0 \end{matrix}}_{=: x(u,v)} & \underbrace{\begin{matrix} -a\sin v\cos u \\ -a\sin v \sin u \\ a\cos v \end{matrix}}_{=: y(u,v)} \end{pmatrix}$$

<u>Zeige</u>: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ sind $x(u,v)$, $y(u,v)$ linear unabhängig.

Es gilt $\left.\begin{matrix} x(u,v) \neq 0 \\ y(u,v) \neq 0 \end{matrix}\right\} \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

<u>Ann.</u>: $x(u,v), y(u,v)$ linear abhängig für $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: x(u,v) = \lambda y(u,v)$

$\overset{3.\text{ Komponente}}{\Rightarrow} 0 = \lambda a \cos v \overset{(\lambda \neq 0,\ a>0)}{\Rightarrow} \cos v = 0 \Rightarrow |\sin v| = 1$

- Falls $\sin v = 1$:

$-R \sin u = -\lambda a \cos u \quad (1)$ sowie

$R\cos u = -\lambda a \sin u \quad (2)$

Es folgen $\sin u \neq 0$, $\cos u \neq 0$ und

$$\lambda = \frac{R}{a} \frac{\sin u}{\cos u} \quad (1') \quad \text{sowie}$$

$$\lambda = -\frac{R}{a} \frac{\cos u}{\sin u} \quad (2')$$

$$\Rightarrow \sin^2 u = -\cos^2 u \quad ↯$$

- Falls $\sin v = -1$: analog

Also: Annahme falsch

$\Rightarrow \operatorname{rang} d\gamma(u,v) = 2 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$