Aufgabe 16 (Blatt 4)

(a) $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ zweidim. differenzierbare Untermannigfaltigkeiten mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, so daß für $x \in M_1 \cap M_2$ $T_x M_1 \neq T_x M_2$

Beh.: $M_1 \cap M_2$ ist eindim. diffbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

Bew.: Zeige ② in Satz 7.3 der Vorlesung

Sei $a \in M_1 \cap M_2$.

$a \in M_1 \overset{7.3 ②}{\Longrightarrow} \exists$ offene Menge $U_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $a \in U_1$ und eine stetig diffbare Funktion $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ mit (a1) $M_1 \cap U_1 = \{x \in U_1 : f_1(x) = 0\}$

(b1) $\dim \langle df_1(a) \rangle = 1$

$a \in M_2 \overset{7.3 ②}{\Longrightarrow} \exists$ offene Menge $U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $a \in U_2$ und eine stetig diffbare Funktion $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ mit (a2) $M_2 \cap U_2 = \{x \in U_2 : f_2(x) = 0\}$

(b2) $\dim \langle df_2(a) \rangle = 1$

Setze $U := U_1 \cap U_2$. (U offen und $a \in U$)

sowie $g_1 := f_1|U$, $g_2 := f_2|U$. ($g_1, g_2 : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar)

Dann gelten:

(a) $M_1 \cap M_2 \cap U = \{x \in U : g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ wegen (a1) und (a2)

(b) Für a gilt nach Voraussetzung $T_a M_1 \neq T_a M_2$, d.h.
$\ker dg_1(a) \neq \ker dg_2(a)$. (nach Satz 7.5)
Es ist $dg_1(a) \neq 0 \neq dg_2(a)$ wegen (b1) und (b2)
Ann.: $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : dg_1(a) = \lambda dg_2(a)$

$\Longrightarrow \ker dg_1(a) = \ker dg_2(a)$ ↯

Also $\langle dg_1(a), dg_2(a) \rangle = 2$

Nach Satz 7.3 ist $M_1 \cap M_2$ eine eindim. diffbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) $E \subseteq \mathbb{R}^3$ Ebene

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ zweidim. diffbare Untermannigfaltigkeit

$M \cap E = \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}^3$

Beh.: $E = x + T_x M$

Bew.: $E = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, v \rangle = c\}$ wobei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$

E ist zweidim. diffbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

$\ulcorner$ Denn:

(3) in Satz 2.3 ist erfüllt:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(y) := \langle y, v \rangle - c$ ist stetig diffbar und es gelten

$df(y) = (v_1, v_2, v_3) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$, da $v \neq 0$, sowie

$E = \{y \in \mathbb{R}^3 : f(y) = 0\}$. $\lrcorner$

Nach Satz 2.5 gilt $T_a E = \ker df(a) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, v \rangle = 0\}$ für $a \in E$

Nach Teil (a): $T_x E = T_x M$

(denn wäre $T_x E \neq T_x M \Rightarrow M \cap E = \{x\}$ eindim. diffbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ $\lightning$)

Wegen $T_x E = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, v \rangle = 0\}$ und $E = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, v \rangle = \underbrace{c}_{= \langle x, v \rangle}\}$

folgt $E = x + T_x E = x + T_x M$