Aufgabe 23

$M \subseteq \mathbb{R}^d$ k-dim. diffbare Untermannigfaltigkeit

Beh.: $S_M(B) := \int_M 1_B \, dS \quad (\in [0,\infty]), \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$

definiert ein Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

Bew.: $S_M(B) \geq 0 \quad \forall \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ klar

Zu zeigen bleibt also die σ-Additivität, d.h.

$$S_M\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} S_M(B_n)$$

für eine Folge (B_n) paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

M k-dim. diffbare Untermfkt. $\overset{(vgl. 7.15)}{\Longrightarrow}$

Es existiert eine Menge $\mathcal{U}$ von offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$ mit $M \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, so daß für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Einbettung $\gamma_U : \Omega_U \to M \cap U$ existiert.

Wähle zu $\mathcal{U}$ eine Zerlegung der Eins $(U_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (Satz 7.13)

Dann folgt

$$S_M\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n\right) = \int_M 1_{\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n} \, dS \overset{(Def.)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\int_{M \cap U_i} 1_{\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n} f_i \, dS}_{} =$$

$$\text{I} = \int_{\Omega_{U_i}} 1_{\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n}(\gamma_{U_i}(u)) f_i(\gamma_{U_i}(u)) \sqrt{g^{\gamma_{U_i}}(u)} \, d\lambda^k(u)$$

$$= \int_{\Omega_{U_i}} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}(\gamma_{U_i}(u)) f_i(\gamma_{U_i}(u)) \sqrt{g^{\gamma_{U_i}}(u)} \, d\lambda^k(u)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_{U_i}} 1_{B_n}(\gamma_{U_i}(u)) f_i(\gamma_{U_i}(u)) \sqrt{g^{\gamma_{U_i}}(u)} \, d\lambda^k(u)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M \cap U_i} 1_{B_n} \cdot f_i \, dS \quad \text{II}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{M \cap N_i} 1_{B_m} \cdot f_i \, dS$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M \cap N_i} 1_{B_m} f_i \, dS$$

$$\overset{(\mathrm{DM})}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{M} 1_{B_m} \, dS$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} S_M(B_m)$$