Aufgabe 29

(b) $G = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1 \} = B_1(0)$

$\partial G = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \} = S^2$

∂G 2-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

Mit $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$:

$G = \{ (x,y,z) : f(x,y,z) < 0 \}$ und $\partial G = \{ (x,y,z) : f(x,y,z) = 0 \}$

$$v(x,y,z) = \frac{\nabla f(x,y,z)}{\|\nabla f(x,y,z)\|} = \frac{(2x,2y,2z)}{\|(2x,2y,2z)\|} = (x,y,z) \quad , (x,y,z) \in S^2,$$

ist äußeres Einheitsnormalenfeld

Mit $F(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2)\,(x,y,z)^T$ gilt

$$\int_{\partial G} F \, d\vec{S} = \int_{S^2} \langle F, v \rangle \, dS = \int_{\Omega} \langle F(\gamma(u,v)), v(\gamma(u,v)) \rangle \cos v \, d\lambda^2(u,v)$$

Γ wobei $\Omega =]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und

$$\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \sin u \\ \sin v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \Omega \qquad \rfloor\!\rfloor$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \, du = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv = 2\pi \left[\sin v \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi (1+1) = 4\pi$$

Mit Gaußschen Integralsatz:

$$\int_{\partial G} F \, d\vec{S} = \int_G \operatorname{div} F(x,y,z) \, d\lambda^3(x,y,z)$$

$$\Bigg[\; F_1(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xz^2 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2$$

$$F_2(x,y,z) = x^2 y + y^3 + z^2 y \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$$

$$F_3(x,y,z) = x^2 z + y^2 z + z^3 \qquad \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$$

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \; \Bigg]$$

$$= 5 \int_{B_1(0)} \|(x,y,z)\|^2 \, d\lambda^3(x,y,z)$$

$$= 5 \cdot 4\pi \int_0^1 r^4 \, dr = 5 \cdot 4\pi \left[\tfrac{1}{5} r^5 \right]_0^1 = 4\pi$$

↑

Integration rotationssymm. Funktionen,
Ana II bzw.
Trafo auf Kugelkoordinaten