Aufgabe 36 Das Lemma von Goursat

$K \subseteq \mathbb{C}$ offene Kugel; $f: K \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar

$\Delta \subseteq K$ Dreieck

(a) $\Delta$ wird gemäß Skizze durch Verbinden der Seitenmittelpunkte in vier kongruente Teildreiecke $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$ zerlegt.

Die Pfeile markieren den Durchlaufungssinn der Ränder $\partial\Delta_1^i$.

Es gilt

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_1^1} f\,dz + \int_{\partial\Delta_1^2} f\,dz + \int_{\partial\Delta_1^3} f\,dz + \int_{\partial\Delta_1^4} f\,dz\right|$$

$$\leq \left|\int_{\partial\Delta_1^1} f\,dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta_1^2} f\,dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta_1^3} f\,dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta_1^4} f\,dz\right|$$

$$\leq 4 \cdot \max_{i=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_1^i} f\,dz\right|$$

Unter den Dreiecken $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$ wähle ein Dreieck $\Delta_1$, für das das Integral über den Rand maximalen Betrag hat. Dann gilt

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz\right|$$

(b) Wendet man auf $\Delta_1$ die gleiche Konstruktion an, so erhält man ein Teildreieck $\Delta_2$ mit

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_2} f\,dz\right|$$

So fortfahrend erhält man eine Folge $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots$ von Teildreiecken mit

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|$$

(c) Beh.: Es gibt genau einen Punkt $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$

Beweis: Da alle $\Delta_n$ kompakt sind, gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n \neq \emptyset$

[ Verwende die folgende Hilfsaussage:

Ist $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Mengen in $\mathbb{R}^d$, so ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$

Beweis: Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K_n$.

$(x_n) \subseteq K_1 \implies \exists$ TF $(x_{n_k})$ und $x_0 \in K_1$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Die Folge $(x_m)_{m \geq n}$ ist in der kompakten Menge $K_n$ enthalten, und $x_0$ ist auch Häufungswert dieser Folge. Folglich gilt $x_0 \in K_n$.

Es folgt $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ ]

Ist $L$ der Umfang des Dreiecks $\Delta$, so hat das Dreieck $\Delta_n$ den Umfang $L_n = 2^{-n} L$. Wegen $\lim_{n\to\infty} L_n = 0$ kann es keine Punkte $z_0, z_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ geben mit $z_0 \neq z_1$.

(d) Nach Voraussetzung ist $f$ in $z_0$ komplex differenzierbar, d.h. es gibt eine Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + r(z)\,|z-z_0|$$

wobei $\lim_{z\to z_0} r(z) = 0$.

Die lineare Funktion $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$ besitzt eine Stammfunktion; somit folgt

$$\int_{\partial \Delta_n} \left( f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \right) dz = 0$$

(Integration über einen geschlossenen Weg)

$$\Longrightarrow \int_{\partial \Delta_n} f \, dz = \int_{\partial \Delta_n} |z - z_0| \, r(z) \, dz$$

__(c)__ Verwende die folgende __Standardabschätzung__:

$\gamma : [a,b] \to U$ stetig, stückweise stetig differenzierbar.

$f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|$$

wobei $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt$ die Länge von $\gamma$ ist.

__Denn:__

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\dot{\gamma}(t)| \, dt$$

($\gamma([a,b])$ ist kompakt; da $f$ stetig ist, existiert $\max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|$.)

$$\leq \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt$$

$$= \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \, L(\gamma)$$

Es gilt dann:

$$4^m \left| \int_{\partial\Delta_m} |z-z_0|\, r(z)\, dz \right| \leq 4^m L_m \cdot \max_{z\in\partial\Delta_m} \big(\underbrace{|z-z_0|}_{\leq L_m,\ \text{da } z_0\in\Delta_m} |r(z)|\big)$$

$$\leq 4^m L_m^2 \cdot \max_{z\in\Delta_m} |r(z)|$$

$$= 4^m \left(\tfrac{1}{2^m}\right)^2 \cdot L^2 \cdot \max_{z\in\Delta_m} |r(z)|$$

$$= L^2 \cdot \max_{z\in\Delta_m} |r(z)|$$

Wegen $\lim_{z\to z_0} r(z) = 0$ und $\lim_{m\to\infty} L_m = 0$ folgt $\lim_{m\to\infty} \left(\max_{z\in\Delta_m} |r(z)|\right) = 0$

(f) Es gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f\, dz \right| \overset{(b)}{\leq} 4^m \left| \int_{\partial\Delta_m} f\, dz \right| \overset{(d)}{=} 4^m \left| \int_{\partial\Delta_m} |z-z_0|\, r(z)\, dz \right|$$

$$\overset{(e)}{\leq} L^2 \cdot \max_{z\in\Delta_m} |r(z)|$$

Da $\lim_{m\to\infty} \left(\max_{z\in\Delta_m} |r(z)|\right) = 0$ (s.o.) folgt $\left| \int_{\partial\Delta} f\, dz \right| = 0$