2. Hausaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 28.10.2004, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Man definiert die **Binominalkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für alle} \quad n, k \in \mathbf{N}, \quad \text{mit} \quad k \le n.$$

Zeigen Sie:

a) $\forall n, k \in \mathbf{N}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

b) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

c) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Bemerkung: Die Formel in b) heißt **Binomische Formel**.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie:
Für alle $x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Bemerkung: Diese Formel heißt **geometrische Summenformel**

Aufgabe 3:
Zeigen Sie die **Bernoullische Ungleichung:**

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x > -1, \quad \forall n \in \mathbf{N} \text{ gilt}$$

$$(1+x)^n \ge 1 + n\,x.$$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie:
$\forall q_1, q_2 \in \mathbf{Q}, \quad q_1 < q_2, \quad \exists\, x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \quad \text{mit} \quad q_1 < x < q_2.$

In Worten: zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt stets eine irrationale Zahl.

Bemerkung: Sie dürfen annehmen, dass es irrationale Zahlen gibt, d.h. dass $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \neq \emptyset$.