3. Hausaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 04.11.2004, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $X \subset \mathbf{R}$ eine beliebige Teilmenge. Sei

$$A := \{s \in \mathbf{R} \,|\, s \quad \text{ist untere Schranke von} \quad X\}$$
$$B := \{s \in \mathbf{R} \,|\, S \quad \text{ist obere Schranke von} \quad X\}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass A und B Intervalle sind.

b) Bestimmen Sie alle Intervallarten, die für A bzw. B möglich sind.

Aufgabe 2:
Schreiben Sie folgende komplexen Zahlen in der Form

$$a + b\,i, \quad a,\, b \in \mathbf{R}.$$

a) $\dfrac{1}{1+2i}$, b) $\dfrac{i^3}{7-i}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{1003} i^n$, d) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{21}$

(Hinweis für d): Berechnen Sie zunächst $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$.)

Aufgabe 3:
Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene:

a) $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$

b) $\{z \in \mathbf{C} \mid 1 \leq |z-i| \leq 2\}$

c) $\{z \in \mathbf{C} \mid Re(z^2) = 1\}$

d) $\{z \in \mathbf{C} \mid Re(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}\}$

Aufgabe 4:
Beweisen Sie die sogenannte **Parallelogrammgleichung** für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbf{C}$:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Was bedeutet die Formel geometrisch?