4. Hausaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 11.11.2004, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Seien M, N, L Mengen und $f : M \to N, \quad g : N \to L$ Funktionen. Die Funktion $g \circ f$ ist definiert durch

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : M & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Zeigen Sie:
a) Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
b) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.
c) Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

Aufgabe 2:
Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie: f ist bijektiv genau dann, wenn es eine Funktion $g : N \to M$ gibt mit $(f \circ g)(x) = x$ für alle $x \in N$
und $(g \circ f)(y) = y$ für alle $y \in M$.

b) Zeigen Sie: Ist f bijektiv, so it die Funktion g in a) eindeutig bestimmt. (Bemerkung: Diese Funktion heißt **Umkehrfunktion von** f und wird mit f^{-1} bezeichnet.)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ ist überabzählbar.
(Hinweis: Gäbe es eine Bijektion $A : \mathbf{N} \to \mathcal{P}(\mathbf{N}), \quad n \mapsto A_n$, so definiere $X := \{n \in \mathbf{N} | n \notin A_n\}$.)

Aufgabe 4:
Sei $(M, <)$ eine geordnete Menge und $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in M.

a) Zeigen Sie: (a_n) ist monoton steigend genau dann, wenn $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n \leq a_{n+1}$. (Hinweis: vollständige Induktion).

b) Formulieren Sie die analogen Bedingungen für streng monoton steigende und (streng) monoton fallende Folgen.