5. Hausaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 18.11.2004, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie, ob die gegebenen Folgen konvergieren, und berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

a) $\left(\dfrac{n^2+n+2}{4n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, b) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, c) $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 2:
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die **Folge der Mittelwerte** ist definiert als

$$a_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

a) Zeigen Sie: Konvergiert (x_n) gegen x, dann konvergiert auch (a_n) gegen x. (Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass (x_n) eine Nullfolge ist.)

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Umkehrung von a) **nicht** gilt: Es gibt eine Folge (x_n), die **nicht** konvergiert, aber die Folge der Mittelwerte konvergiert.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, dann konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst: ist $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ streng monoton steigend, dann gilt $\varphi(n)\geq n$ für alle $n\in\mathbb{N}$).

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, dann konvergiert auch jede Umordnung von (a_n) gegen a.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst: ist $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijektiv, dann gibt es für jedes $n_0\in\mathbb{N}$ ein $m_0\in\mathbb{N}$, so dass für alle $m\in\mathbb{N}$ gilt:
$m\geq m_0 \Rightarrow \varphi(m)\geq n_0$).

Über die Anfängervorlesungen und die Übungen kann im Forum der Fachschaft Mathematik diskutiert werden:
http://mentor.mathematik.uni-dortmund.de