6. Hausaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 25.11.2004, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

a) Zeige: $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls beschränkt.

b) Zeige eine der beiden Ungleichungen:

i) $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$

ii) $\underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$

c) Gib ein Beispiel von Folgen $(a_n), (b_n)$, wo in b) **keine** Gleichheit gilt.

Aufgabe 2:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeige eine der folgenden Aussagen:

i) $\overline{\lim}\, a_n < \infty$ genau dann , wenn $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist.

ii) $\underline{\lim}\, a_n > -\infty$ genau dann , wenn $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt ist.

Aufgabe 3:
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige:
Ist $\lim a_n = \infty$ und $\underline{\lim}\, b_n > -\infty$, so ist $\lim\,(a_n + b_n) = \infty$.

Aufgabe 4:
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige:
Ist $\lim a_n = \infty$ und $\underline{\lim}\, b_n > 0$, so ist $\lim\,(a_n\, b_n) = \infty$.

Hinweis: Man zeige zunächst: Ist $\underline{\lim}\, b_n > 0$, so gibt es ein $c > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \geq c$ für alle $n \geq n_0$. Betrachte dazu die Folge $\underline{s}_n = \inf\{b_m | m \geq n\}$.