8. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 09.12.2004, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \min\{1, \varrho\}$ gilt:

$$\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n\, x^n \quad \text{wobei} \quad s_n := a_0 + ... + a_n.$$

(Hinweis: Verwende das Cauchyprodukt).

Aufgabe 2:
Bestimme die Häufungspunkte der folgenden Mengen $X \subset \mathbb{R}$:

a) $X = \mathbb{Q}$, b) $X = \mathbb{N}$, c) $X = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Bestimme für jedes $a \in \mathbb{R}$ $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ und $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$.

b) Bestimme, für welche $a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert.

Aufgabe 4:
Wir setzen (aus dem Schulwissen) voraus, dass es eine Funktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ gibt, so dass gilt

1) sin ist surjektiv
2) es gibt eine positive Konstante (nämlich 2π), so dass $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bestimme alle Häufungswerte in $a = 0$ für die folgenden Funktionen $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, wobei $X := \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

b) $g(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$.

Bestimme für diese Funktionen $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}$ und $\underline{\lim\limits_{x\to 0}}$, und ob $\lim\limits_{x\to 0}$ existiert.

(Hinweis: Skizziere diese Funktionen).