9. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 16.12.2004, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Bestimme für die folgenden Mengen, ob sie offen, abgeschlossen bzw. kompakt sind.

a) $\{2, 4, 6, 8, ...\} \subset \mathbb{R}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| \geq 1,\ |z|^3 \leq 3\} \subset \mathbb{C}$

c) $((-5, 2) \cup (7, 22)) \cap (-3, 15) \subset \mathbb{R}$

d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\} \subset \mathbb{R}$

Aufgabe 2:
Zeige: $\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$ ist sowohl offen in $\mathbb{Q}$ als auch abgeschlossen in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3:
Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bestimme alle Punkte, in denen f stetig ist.

Aufgabe 4:
Sei $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. $a \in X$ heißt **isoliert**, falls a **kein** Häufungspunkt von X ist.

a) Bestimme die isolierten Punkte von $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$.

b) Zeige: $a \in X$ ist isoliert genau dann, wenn $\exists \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(a) \cap X = \{a\}$.

c) Zeige: Ist $a \in X$ isoliert und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $a = \lim x_n$, dann $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n = a$.

d) Zeige: **Jede** Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ ist stetig in a, falls $a \in X$ isoliert ist.