10. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 06.01.2005, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ p, q \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Zeige:

a) $\exp(n\, ln\, a) = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{n-\text{mal}}$, d. h. die beiden Definitionen von a^n für $n \in \mathbb{N}$ stimmen überein.

b) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ und $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$.

c) $(a^p)^q = a^{pq}$

d) $(ab)^p = a^p\, b^p$

e) $\log_a(x^p) = p\, \log_a x$ und $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Aufgabe 2:
Berechne $\lim \dfrac{\log_a n}{n}$ für $a > 1$.
(Hinweis: Berechne zunächst $\lim \exp\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.)

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x)\, f(y)$. Zeige: Es gibt ein $a > 0$, so dass $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Hinweis: Bestimme zunächst a, zeige dann nacheinander:
$f(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{N}$, für $x \in \mathbb{Z}$, für $x \in \mathbb{Q}$, für $x \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 4:
Untersuche die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x}$.