11. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 13.01.2005, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Es sei $a > 0$. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^{(x^x)}$ b) $f(x) = (x^x)^x$ c) $f(x) = x^{(x^a)}$

d) $f(x) = x^{(a^x)}$ e) $f(x) = a^{(x^x)}$

Aufgabe 2:
Beweise die **Leibnitzformel** für die n-te Ableitung eines Produktes:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 3:
Sei $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeige:
Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 g(x)$ ist differenzierbar in $x = 0$. Berechne $f'(0)$.

Aufgabe 4:

a) Zeige: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so gilt:
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

b) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die Existenz des Grenzwertes $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ **nicht** impliziert, dass f in x_0 differenzierbar ist.