12. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis I

Abgabetermin: Donnerstag, 20.01.2005, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

b) $\lim_{x\to 1^-} ln\,x\,ln(1-x)$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1-x+ln\,x}$

Aufgabe 2:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Zeige: Es gibt eine Konstante $L > 0$, so dass für alle $x, y \in [a,b]$ gilt:
$|f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$.

Aufgabe 3:
Berechne das Taylorpolynom 3. Grades um x_0 für die folgenden Funktionen:

$a) f(x) = ln\,x, \qquad x_0 = 2$

$b) f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x_0 = 1$

$c) f(x) = \sqrt[3]{1-x}, \quad x_0 = 0$

$d) f(x) = \exp(\frac{1}{x}), \quad x_0 = 1$

Bestimme für eine dieser Funktionen eine obere Schranke für
$|R_3^{x_0}(x)|$ für $|x - x_0| \leq 0,1$.

Aufgabe 4:

a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\xi_n \in (0,1)$, so dass
$$e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2!} + ... + \tfrac{1}{n!} + \tfrac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}.$$

b) Zeige: e ist irrational.
(Hinweis: Falls $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, verwende a) mit $n \geq q$ und multipliziere mit $n!$)