Lösungen zur Klausur Analysis I

von Sebastian Grütering und Stefan Kaspar

Aufgabe 1:

Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme den Wert der Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Lösung:

Behauptung: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Beweis: (Vollständige Induktion nach n)

Induktionsanfang: n = 1

$2^1 = 2 = 1 + 1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k}$

Induktionsschritt: n $\rightarrow$ n + 1

$\sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1}$

$= 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) + 1$

$= \binom{n}{0} + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n}$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

$\square$

Alternativ:

Auf einem Hausaufgabenzettel haben wir die allgemeine binomische Formel

$(x + y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

bewiesen und mit $x = y = 1$ folgt:

$\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Aufgabe 2:

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$, und es sei $a := \lim a_n$ und $b := \lim b_n$.
Zeige direkt - ohne Verwendung von Sätzen aus der Vorlesung - das $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Beweis:

$(a_n - a)$ ist Nullfolge
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2},$

$(b_n - b)$ ist Nullfolge
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Wähle $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |\underbrace{a_n - a}_{<\frac{\varepsilon}{2}}| + |\underbrace{b_n - b}_{<\frac{\varepsilon}{2}}| < \varepsilon$

$\Rightarrow ((a_n - a) + (b_n - b))$ ist Nullfolge
$\Rightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$

$\square$

Aufgabe 3:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$

Lösung:

<u>Anwendung des Wurzelkriteriums</u>:

$\overline{lim}\ \sqrt[n]{|\sqrt[n]{n}-1|^n} = \overline{lim}\ |\sqrt[n]{n}-1|$

Übungszettel $\Rightarrow lim\ \sqrt[n]{n} = 1$
$\Rightarrow (\sqrt[n]{n}-1)$ ist Nullfolge

$\Rightarrow \overline{lim}\ |\sqrt[n]{n}-1| = 0$

Da $\overline{lim}\ |\sqrt[n]{n}-1| = 0 < 1$ folgt aus dem Wurzelkriterium:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ ist absolut konvergent

b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n^3+n}{\sqrt{n^5-3n^4+7}}$

Lösung:

<u>Anwendung des Quotientenvergleichstest</u>:

<u>Annahme</u>: Die Reihe divergiert $\Rightarrow$ <u>z.z.</u>: $\underline{lim}\ \dfrac{|a_n|}{b_n} > 0$

Setze $b_n = \frac{1}{n}$, da $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

Beträge können weggelassen werden, da $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n^3+n}{\sqrt{n^5-3n^4+7}} > 0$,
$\forall n \in \mathbb{N}, n > 3$. Also:

$$\underline{lim}\frac{\frac{n^3+n}{\sqrt{n^5-3n^4+7}}}{\frac{1}{n}} = \underline{lim}\frac{(n^3+n)\cdot n}{\sqrt{n^5-3n^4+7}} = \underline{lim}\frac{n^4+n^2}{\sqrt{n^5-3n^4+7}}$$
$$= \underline{lim}\frac{\sqrt{(n^4+n^2)^2}}{\sqrt{n^5-3n^4+7}} = \underline{lim}\sqrt{\frac{n^8+2n^6+n^4}{n^5-3n^4+7}} = \underline{lim}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^3}-\frac{3}{n^4}+\frac{7}{n^8}}}$$

$\Rightarrow$ Der Term unter der Wurzel ist > 0, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ und divergiert gegen $+\infty$.

Quotientenvergleichstest $\Rightarrow$ die Reihe $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n^3+n}{\sqrt{n^5-3n^4+7}}$ divergiert.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Lösung:

Anwendung des Quotientenkriteriums:

$$\overline{lim} \frac{|\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}|}{|\frac{3^n n!}{n^n}|}$$

Beträge können weggelassen werden, da $\frac{3^n n!}{n^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \overline{lim} \frac{|\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}|}{|\frac{3^n n!}{n^n}|} = \overline{lim} \frac{3 \cdot 3^n \cdot n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \overline{lim} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \overline{lim} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

Übungszettel $\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n = e < 3$

$$\Rightarrow \overline{lim} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$$

nach dem Quotientenkriterium folgt deswegen, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ divergiert.

Aufgabe 4:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Definiere $f_+, f_- : I \to \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{falls } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0, & \text{falls } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Zeige:
a) $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.
b) f ist genau dann stetig wenn f_+ und f_- stetig sind.

Lösung:

a) **z.z.:** $f = f_+ - f_-$

Beweis:

1 Fall: $f(x) = 0$

$\Rightarrow f_+(x) = 0,\ f_-(x) = 0$
$\Rightarrow f_+(x) - f_-(x) = 0 - 0 = f(x)$

2 Fall: $f(x) > 0$

$\Rightarrow f_+(x) = f(x),\ f_-(x) = 0$
$\Rightarrow f_+(x) - f_-(x) = f(x) - 0 = f(x)$

3 Fall: $f(x) < 0$

$\Rightarrow f_+(x) = 0,\ f_-(x) = -f(x)$
$\Rightarrow f_+(x) - f_-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$

$\Rightarrow f = f_+ - f_-$

z.z.: $|f| = f_+ + f_-$

Beweis:

1 Fall: $f(x) = 0$

$\Rightarrow f_+(x) = 0,\ f_-(x) = 0$
$\Rightarrow f_+(x) + f_-(x) = 0 + 0 = |f(x)|$

2 Fall: $f(x) > 0$

$\Rightarrow f_+(x) = f(x),\ f_-(x) = 0$
$\Rightarrow f_+(x) + f_-(x) = f(x) + 0 = |f(x)|$

3 Fall: $f(x) < 0$

$\Rightarrow f_+(x) = 0,\ f_-(x) = -f(x)$
$\Rightarrow f_+(x) + f_-(x) = 0 + (-f(x)) = -f(x) = |f(x)|$

$\Rightarrow |f| = f_+ + f_-$

b) **z.z.:** f ist genau dann stetig wenn f_+ und f_- stetig sind

Beweis:

"$\Rightarrow$"

z.z.: f_+ ist stetig

1. Fall: $f(x) > 0$

$\Rightarrow f_+(x) = f(x)$
$\Rightarrow f_+$ ist stetig in $a \in I$, falls gilt: $f(a) > 0$

2. Fall: $f(x) = 0$

Seien $\varepsilon > 0$ und die beliebigen Folgen $(x_n),\ (y_n)$ in I gegeben mit
$(x_n) < x,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim(x_n) = x$ und $(y_n) > x,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim(y_n) = x$.

i) f ist in einer ε-Umgebung von x Null oder negativ

$\Rightarrow f_+$ ist in der ε-Umgebung konstant null und trivialerweise stetig

ii) f ist in einer ε-Umgebung von x linksseitig positiv, rechtsseitig Null oder negativ

Ab einem gewissen Index $n_1 \in \mathbb{N}$ gilt: $f_+(x_n) = f(x_n)$
$\Rightarrow \lim f(x_n) = \lim f_+(x_n) = 0$

Ab einem gewissen Index $n_2 \in \mathbb{N}$ gilt: $f_+(y_n) = 0$
$\Rightarrow \lim f_+(y_n) = 0$

iii) f ist rechtsseitig positiv, linksseitig Null oder negativ

iv) f ist beidseitig positiv

iii), iv) analog zu ii) unter Berücksichtigung der Vorraussetzung.

$\Rightarrow f_+$ ist stetig in $a \in I$, falls gilt: $f(a) = 0$

3. Fall: $f(x) < 0$

Sei (x_n) eine beliebige Folge in I mit $(x_n) \neq x,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim(x_n) = x$.

$\Rightarrow$ Ab einem gewissen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt: $f_+(x_n) = 0$
$\Rightarrow \lim f_+(x_n) = 0$
$\Rightarrow f_+$ ist stetig in $a \in I$, falls gilt: $f(a) < 0$

$\Rightarrow f_+$ ist stetig

Analog kann man zeigen, dass f_- stetig ist.

"$\Leftarrow$"

Vorraussetzung: f_+, f_- stetig

Satz aus der Vorlesung:
Seien $X \subset \mathbb{R}$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $(f \pm g) : X \to \mathbb{R}$ stetig.

Da $f = f_+ - f_-$ ist f stetig.

$\square$

Aufgabe 5:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

a) z.z.: Ist f gleichmäßig stetig und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so ist auch $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Beweis:

Definition gleichmäßig stetig:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in (a, b),\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Definition Cauchyfolge:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
$\Rightarrow$ es existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt:
$\forall x, y \in (a, b),\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
da für jedes $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt: $\forall n, m > n_0 : |a_n - a_m| < \delta$
folgt daraus, dass: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_0 : |f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$
$\Rightarrow (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.

$\square$

b) <u>z.z.</u>: f ist gleichmäßig stetig genau dann wenn $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existieren (in $\mathbb{R}$).

<u>Beweis</u>:

"$\Rightarrow$"

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in (a,b) mit $x_n > a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim x_n = a$

Satz aus der Vorlesung: (x_n) konvergiert $\Leftrightarrow$ (x_n) ist Cauchyfolge.

aus dem Satz und a) folgt, dass $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge ist und dass $(f(x_n))$ konvergiert

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert und da $\lim x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Analog für $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ mit der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die gilt:
$y_n \in (a,b)$, $y_n < b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim y_n = b$

"$\Leftarrow$"

<u>Vorraussetzungen</u>: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, sowie $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existieren in $\mathbb{R}$

Satz aus der Vorlesung:
Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist g gleichmäßig stetig.

Setze $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ und $f(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

$\Rightarrow f(a) \in \mathbb{R}$ und $f(b) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ ist stetig und kann auf die Intervallränder stetig fortgesetzt werden

$\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig

$\square$

Aufgabe 6:

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in I$.
Sei f außerdem differenzierbar in $I \backslash \{x_0\}$.
Zeige: Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existiert, so ist f differenzierbar in x_0, und
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Beweis:

Vorraussetzung: $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) =: L$ existiert.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f'(x) - L| < \varepsilon \quad (*)$

z.z.: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert und ist gleich L.
Dieser Limes existiert und ist gleich L genau dann, wenn
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \varepsilon \quad (**)$

Seien nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben und ein $\delta > 0$ so gewählt, dass (*) erfüllt ist.
Sei $x \in I$ so gewählt, dass $0 < |x - x_0| < \delta$ erfüllt ist.
f ist stetig auf $[x, x_0] \cup [x_0, x]$ und differenzierbar auf $(x, x_0) \cup (x_0, x)$.
1. Mittelwertsatz $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Nun ist wegen $\xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ und $0 < |x - x_0| < \delta$ auch $0 < |\xi - x_0| < \delta$ und nach Vorraussetzung folgt:

$$0 < |x_i - x_0| < \delta \Rightarrow |f'(\xi) - L| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (**) \text{ ist erfüllt und } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

$\square$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zeige: Falls $n \geq 3$, so ist f differenzierbar.

<u>**Beweis**</u>**:**

$f(x)$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, denn x^n und $\sin(\frac{1}{x})$ sind auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, also auch $x^n \cdot \sin(\frac{1}{x})$.
Falls $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existiert, dann ist f auch in 0 differenzierbar
(nach Teilaufgabe a).

$f'(x) = nx^{n-1} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - x^{n-2} \cdot \cos(\frac{1}{x}) = x^{n-2} \cdot \big(nx \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})\big)$

Für $n \geq 3$ gilt:

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ existiert und ist gleich 0, da $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0,\ n \in \mathbb{N}$, außerdem ist $\big(nx \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})\big)$ beschränkt, da $\lim\limits_{x \to 0} \big(nx \cdot \sin(\frac{1}{x})\big) = 0$ (Hausaufgabenzettel) und $\overline{\lim} \cos(\frac{1}{x}) = 1$, $\underline{\lim} \cos(\frac{1}{x}) = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0 \cdot (...) = 0$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar, falls $n \geq 3$.

Aufgabe 7:

a) <u>z.z.</u>: $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 : \sin(x) < x$

<u>Beweis</u>:

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \frac{|\sin(x)|}{x} = \frac{|\sin(x) - \sin(0)|}{(x-0)}$$

aus dem Mittelwertsatz folgt:

$$\frac{|\sin(x) - \sin(0)|}{(x-0)} = |\sin'(x_i)| = |\cos(x_i)| < 1$$

$\Rightarrow \sin(x) \leq |\sin(x)| < x$

$\square$

b) Berechne das Taylorpolynom $T_3^0(x)$ für die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$$

<u>Lösung</u>:

$f^{(1)}(x) = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x);\quad f^{(1)}(0) = 1$

$f^{(2)}(x) = -2e^{-x}\cos(x);\quad f^{(2)}(0) = -2$

$f^{(3)}(x) = 2e^{-x}\cos(x) + 2e^{-x}\sin(x);\quad f^{(3)}(0) = 2$

$$\begin{aligned} T_3^0(x) &= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot x^3 \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \end{aligned}$$

c) <u>z.z.</u>: $\forall x \in [0,1]$ gilt:

$$|f(x) - T_3^0(x)| < \tfrac{1}{2}|x^5|$$

Lösung:

$f^{(4)}(x) = -4e^{-x}\sin(x)$

Nach dem Satz von Taylor ist $|f(x) - T_3^0(x)|$ das 3-te Restglied von f in x_0.

$|R_3^0(x)| = \dfrac{1}{24} \cdot |f^{(4)}(\xi)| \cdot x^4; \ x \in [0,1], \ \xi \in [0,x]$

$|R_3^0(x)| = \dfrac{1}{24} \cdot |(-4)e^{-\xi} \cdot \sin(\xi)| \cdot x^4$

Setze $\xi = x$.

$|R_3^0(x)| = \dfrac{1}{24} \cdot |(-4)e^{-x} \cdot \sin(x)| \cdot x^4$

aus a) folgt: $x > \sin(x)$

$\Rightarrow |R_3^0(x)| < \dfrac{1}{6}e^{-x} \cdot x \cdot x^4 = \dfrac{1}{6}e^{-x} \cdot x^5$

da $e^{-x} \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x > 0$ gilt:

$|R_3^0(x)| < \dfrac{1}{2}|x|^5$

Aufgabe 8:

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

Lösung:

Integration durch Substitution.

Setze $u = -x^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = -2x$

$\Rightarrow \int -x \cdot u \cdot e^u \dfrac{du}{-2x} = \dfrac{1}{2} \int u e^u du = \dfrac{1}{2} \left[u e^u - \int e^u du \right] = \dfrac{1}{2} \left[u e^u - e^u \right]$

$\Rightarrow \int x^3 e^{-x^2} dx = \dfrac{1}{2} \left[-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} \right] + c$

b) $\int \cos x \sin(2x)\; dx$

Lösung:

$\int \cos x \sin(2x)\; dx = \sin x \sin(2x) - \int \sin x \cos(2x) 2\; dx$

$= \sin x \sin(2x) - 2 \left[-\cos x \cos(2x) - \int -\cos x (-\sin(2x)) 2\; dx \right]$

$= \sin x \sin(2x) + 2 \cos x \cos(2x) + 4 \int \cos x \sin(2x) dx$

$\Rightarrow \int \cos x \sin(2x)\; dx = -\dfrac{1}{3} \sin x \sin(2x) - \dfrac{2}{3} \cos x \cos(2x) + c$

c) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

Lösung:

Integration durch Substitution.

Setze $u = \ln x \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \int \dfrac{1}{x\sqrt{u}} \cdot x\; du = \int \dfrac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2\sqrt{u}$

$\Rightarrow \int \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} + c$